doi:10.3969/j.issn.1000-2162.2024.02.001

Hardy 型 Tent 空间上乘积算子的有界性

胡　蓉
(四川文理学院 数学学院,四川 达州 635000)

摘　要:研究 Hardy 型 Tent 空间上乘积算子 M_g 的有界性问题,借助序列型 Tent 空间的对偶性及分解定理,分情况给出所有参数 $0<p_1,p_2,q_1,q_2<\infty$,$\alpha_1,\alpha_2>-n-1$ 所对应的算子 $M_g:HT_{q_1,\alpha_1}^{p_1}(B_n)\rightarrow HT_{q_2,\alpha_2}^{p_2}(B_n)$ 有界的连续型和离散型两种等价刻画.

关键词:单位球;乘积算子;Tent 空间;有界
中图分类号:O177.2　　**文献标志码**:A　　**文章编号**:1000-2162(2024)02-0001-07

Boundedness of multiplication operators on Hardy type Tent spaces

HU Rong
(School of Mathematics, Sichuan University of Arts and Science, Dazhou 635000, China)

Abstract: This paper discussed the boundedness of the multiplication operators M_g on Hardy type tent spaces in the unit ball of $\mathbb{C}^n$. By using the duality and factorization tricks of the tent spaces of sequences, it gave both the discrete and continuous characterizations of the boundedness of multiplication operators M_g from $HT_{q_1,\alpha_1}^{p_1}(B_n)$ to $HT_{q_2,\alpha_2}^{p_2}(B_n)$ for all parameters $0<p_1,p_2,q_1,q_2<\infty$ and $\alpha_1,\alpha_2>-n-1$.

Keywords: unit ball; multiplication operators; tent spaces; boundedness

设 g 为任意给定的全纯函数,乘积算子 $M_gf(z):=f(z)g(z)$ 在各类函数空间上的有界性、紧性问题一直受到广大学者的关注[1-5]. 文献[1]给出 Bloch 空间上乘积算子有界的充分必要条件,文献[2]给出加权 Bergman 空间到 Bloch-Orlicz 空间上乘积型算子有界和紧的等价刻画,文献[3]研究了 Riesz 有界变差空间上乘积算子的紧性. Tent(帐篷)空间的概念最先是由 Coifman 等[6]在 1985 年提出. Hardy 型 Tent 空间是 Tent 空间与全纯函数空间的交集,Perälä 最早在文献[7]中对它进行研究. 最近的研究[8-12]表明 Hardy 型 Tent 空间 $HT_{q,\alpha}^p(B_n)$ 与经典的 Bergman 空间 A_α^p 和 Hardy 空间 H^p 都有着紧密的联系,如 A_α^p 可看作 $HT_{p,\alpha-n}^p$,$f\in H^p$ 当且仅当 $Rf\in HT_{2,1-\alpha}^p$. 鉴于此,作者将在已有的研究成果上,进一步研究更大的函数空间 Hardy 型 Tent 空间上经典的乘积算子 $M_g:HT_{q_1,\alpha_1}^{p_1}(B_n)\rightarrow HT_{q_2,\alpha_2}^{p_2}(B_n)$ 的有界性问题,借助序列型 Tent 空间的对偶性和分解定理,完整地刻画所有参数 $0<p_1,p_2,q_1,q_2<\infty$,$\alpha_1,\alpha_2>-n-1$ 所对应的 Hardy 型 Tent 空间上乘积算子有界的充分必要条件.

约定下文中一些常用记号:记 B_n 为 $\mathbb{C}^n$ 上的单位球,S_n 为 B_n 的边界,$\mathrm{d}v(z)$ 为 B_n 上规范化后的体积测度,$\mathrm{d}v_\alpha(z)=c(n,\alpha)(1-|z|^2)^\alpha\mathrm{d}v(z)$ 为加权体积测度,其中:$c(n,\alpha)$ 是规范化常数,$\mathrm{d}\sigma$ 为 S_n 上

收稿日期:2022-05-17
基金项目:国家自然科学基金资助项目(12101467)
作者简介:胡　蓉(1985-),女,四川南充人,四川文理学院教授,硕士,E-mail: 85194136@qq.com.

规范化后的表面积测度,$\beta(z,w)$为$\mathbb{B}_n$中的Bergman度量,$D(a,r)=\{z\in B_n:\beta(a,z)<r\}$为$\mathbb{B}_n$中以$a$为心、$r>0$为半径的Bergman度量球.任意$0<r<1$,总能在$\mathbb{B}_n$中找到点列$\{a_k\}$满足:(a)$B_n=\bigcup_k D(a_k,r)$;(b)集合$D(a_k,r/4)$两两互不相交;(c)$\mathbb{B}_n$中的任意点至多包含在有限个$D(a_k,4r)$中,这样的$\{a_k\}$称为$r$-格[13].任意$p\in[1,\infty]$,$p'=\dfrac{p}{p-1}$表示$p$的Hölder共轭数.两个非负量$a$和$b$,若存在常数$C$和$C'>0$,使得$a\leqslant Cb$且$b\leqslant C'a$,则称$a$和$b$是可比的,记为$a\simeq b$.由于常数$C$的精确值一般并不在意,故下文中在不同的地方$C$可以表示不同的值.

任意$\xi\in S_n$,$\gamma>1$,记

$$\Gamma_\gamma(\xi):=\left\{z\in B_n:|1-\langle z,\xi\rangle|<\frac{\gamma}{2}(1-|z|^2)\right\}.$$

特别地,$\gamma=2$时,$\Gamma_2(\xi)$简记$\Gamma(\xi)$.易知对任意$r>1$,$\gamma>1$,存在$\gamma'>1$,使得

$$\bigcup_{z\in\Gamma_\gamma(\xi)} D(z,r)\subset\Gamma_{\gamma'}(\xi). \tag{1}$$

在不必强调口径γ取值大小的前提下,常用$\widetilde{\Gamma}(\xi)$表示因口径改变而得到的不同区域.任意给定$z\in B_n$,定义集合$I(z)=\{\xi\in S_n:z\in\Gamma(\xi)\}\subset S_n$,则$\sigma(I(z))\sim(1-|z|^2)^n$.由Fubini定理,可得下列积分等价式

$$\int_{B_n}\varphi(z)\mathrm{d}v(z)\simeq\int_{S_n}\left(\int_{\Gamma(\xi)}\varphi(z)\frac{\mathrm{d}v(z)}{(1-|z|^2)^n}\right)\mathrm{d}\sigma(\xi).$$

任意非零向量$u\in B_n$,设$\zeta_u=u/|u|$,记

$$Q(u):=\{z\in B_n:|1-\langle z,\zeta_u\rangle|<1-|u|^2\}.$$

定义1 设$0<p,q<\infty$,$\alpha>-n-1$,f为定义在B_n上的可测函数.Tent空间$T^p_{q,\alpha}(B_n)$由满足

$$\|f\|^p_{T^p_{q,\alpha}(B_n)}:=\int_{S_n}\left(\int_{\Gamma(\xi)}|f(z)|^q(1-|z|^2)^\alpha\mathrm{d}v(z)\right)^{p/q}\mathrm{d}\sigma(\xi)<\infty$$

的函数全体构成.当$\alpha=0$时,$T^p_{q,\alpha}(B_n)$简记为$T^p_q(B_n)$.相应地,有

$$T^p_\infty(B_n)=\left\{f\,\middle|\,\|f\|^p_{T^p_\infty(B_n)}:=\int_{S_n}\left(\operatorname*{ess\,sup}_{z\in\Gamma(\xi)}|f(z)|\right)^p\mathrm{d}\sigma(\xi)<\infty\right\},$$

$$T^\infty_{q,\alpha}(B_n)=\left\{f\,\middle|\,\|f\|_{T^\infty_{q,\alpha}(B_n)}=\sup_{\xi\in S_n}\left(\sup_{u\in\Gamma(\xi)}\frac{1}{(1-|u|^2)^n}\int_{Q(u)}|f(z)|^q(1-|z|^2)^{n+\alpha}\mathrm{d}v(z)\right)^{1/q}<\infty\right\}.$$

定义2 设$0<p,q<\infty$,$\alpha>-n-1$,Hardy型Tent空间$HT^p_{q,\alpha}(B_n)$由$T^p_{q,\alpha}(B_n)$中的全纯函数全体构成,并有$\|f\|_{HT^p_{q,\alpha}}=\|f\|_{T^p_{q,\alpha}(B_n)}$.

定义3 设$0<p,q<\infty$,r-格$Z=\{a_k\}\subset B_n$,序列型Tent空间$T^p_q(Z)$由满足

$$\|\lambda\|^p_{T^p_q(Z)}:=\int_{S_n}\left(\sum_{a_k\in\Gamma(\xi)}|\lambda_k|^q\right)^{p/q}\mathrm{d}\sigma(\xi)<\infty$$

的复序列$\lambda=\{\lambda_k\}$全体构成.相应地,有

$$T^p_\infty(Z)=\left\{\lambda=\{\lambda_k\}\,\middle|\,\|\lambda\|^p_{T^p_\infty(Z)}:=\int_{S_n}\left(\sup_{a_k\in\Gamma(\xi)}|\lambda_k|\right)^p\mathrm{d}\sigma(\xi)<\infty\right\},$$

$$T^\infty_q(Z)=\left\{\lambda=\{\lambda_k\}\,\middle|\,\|\lambda\|_{T^\infty_q(Z)}:=\sup_{\xi\in S_n}\left(\sup_{u\in\Gamma(\xi)}\frac{1}{(1-|u|^2)^n}\sum_{a_k\in Q(u)}|\lambda_k|^q(1-|a_k|^2)^n\right)^{1/q}<\infty\right\}.$$

1 一些引理

引理1[10] 设$0<p,q<\infty$,$\alpha>-n-1$,则对任意$f\in HT^p_{q,\alpha}(B_n)$,有

$$|f(z)|\leqslant C\|f\|_{HT^p_{q,\alpha}}(1-|z|^2)^{-\frac{n+1+\alpha}{q}-\frac{n}{p}}.$$

引理2[8] 当$0<p<t<\infty$,$0<q<\infty$,$\alpha>-n-1$时,令$\eta=\dfrac{nt}{p}-n-1+\dfrac{t(n+1+\alpha)}{q}$,则

$$HT^p_{q,\alpha}(B_n)\subset A^t_\eta(B_n).$$

引理 3[7]　当 $0<p_2<p_1<\infty, 0<q_1\leqslant q_2<\infty, \alpha_1>-n-1$ 时，若 $\alpha_2=\dfrac{q_2(n+1+\alpha_1)}{q_1}-n-1$，则

$$HT^{p_1}_{q_1,\alpha_1}(B_n)\subset HT^{p_2}_{q_2,\alpha_2}(B_n).$$

引理 4[7]　设 $0<p,q<\infty, \theta>n\max(1,\dfrac{q_1}{p_1},\dfrac{1}{p_1},\dfrac{1}{q_1}), Z=\{a_k\}$ 为 r-格，则算子

$$S_Z^\theta\{\lambda_k\}(z)=\sum_{k=1}^{\infty}\lambda_k\frac{(1-|a_k|^2)^\theta}{(1-\langle z,a_k\rangle)^{\theta+\frac{n+1+\alpha}{q}}}$$

为 $T^p_q(Z)$ 到 $HT^p_{q,\alpha}(B_n)$ 的有界算子.

引理 5[7]　设 $\{a_k\}$ 为 B_n 中的 r-格，当 $1\leqslant p,q<\infty$ 且 $p+q\neq 2$ 时，$T^p_q(Z)$ 的对偶空间在序对

$$\langle c,d\rangle_{T_2^2(Z)}=\sum_k c_k\overline{d_k}(1-|a_k|^2)^n,\ c=\{c_k\}\in T^p_q(Z),\ d=\{d_k\}\in T^{p'}_{q'}(Z)$$

作用下同构于 $T^{p'}_{q'}(Z)$. 其中：p',q' 分别为 p,q 的 Hölder 共轭数；当 $0<q<1<p<\infty$ 时，$T^p_q(Z)$ 的对偶空间在上述序对下同构于 $T^{p'}_{\infty}(Z)$.

引理 6[8]　设 $0<p,q<\infty$，序列 $Z=\{a_k\}$ 为 $\mathbb{B}_n$ 中的 δ-格. 若 $p<p_1,p_2<\infty, q<q_1,q_2<\infty$ 且满足 $\dfrac{1}{p_1}+\dfrac{1}{p_2}=\dfrac{1}{p}, \dfrac{1}{q_1}+\dfrac{1}{q_2}=\dfrac{1}{q}$，则序列型 Tent 空间有如下分解

$$T^p_q(Z)=T^{p_1}_{q_1}(Z)\cdot T^{p_2}_{q_2}(Z).$$

2　主要结果及证明

定理 1　设 $0<p_1,p_2,q_1,q_2<\infty, \alpha_1,\alpha_2>-n-1$，若算子 $M_g: HT^{p_1}_{q_1,\alpha_1}(B_n)\to HT^{p_2}_{q_2,\alpha_2}(B_n)$ 有界，则

$$g(z)(1-|z|^2)^{\frac{n+1+\alpha_2}{q_2}-\frac{n+1+\alpha_1}{q_1}+n(\frac{1}{p_2}-\frac{1}{p_1})}<\infty.$$

证明　任意 $a\in B_n, \theta>0$，令

$$F_a(z)=\frac{(1-|a|^2)^\theta}{(1-\langle z,a\rangle)^{\theta+\frac{n+1+\alpha_1}{q_1}+\frac{n}{p_1}}},\ z\in B_n,$$

易验证 $F_a(z)\in HT^{p_1}_{q_1,\alpha_1}(B_n)$. 由 $M_g: HT^{p_1}_{q_1,\alpha_1}(B_n)\to HT^{p_2}_{q_2,\alpha_2}(B_n)$ 有界以及引理 1，有

$$|M_gF_a(z)|\leqslant C\|M_gF_a\|_{HT^{p_2}_{q_2,\alpha_2}}(1-|z|^2)^{-\frac{n+1+\alpha_2}{q_2}-\frac{n}{p_2}}\leqslant C\|M_g\|\,\|F_a\|_{HT^{p_1}_{q_1,\alpha_1}}(1-|z|^2)^{-\frac{n+1+\alpha_2}{q_2}-\frac{n}{p_2}},$$

在上式中令 $z=a$，易算得

$$g(z)(1-|z|^2)^{\frac{n+1+\alpha_2}{q_2}-\frac{n+1+\alpha_1}{q_1}+n(\frac{1}{p_2}-\frac{1}{p_1})}\leqslant C\|M_g\|\,\|F_a\|_{HT^{p_1}_{q_1,\alpha_1}}<\infty.$$

下面定理给出当参数 p_1,p_2,q_1,q_2 满足一定条件时，定理 1 中的必要条件同时也是充分的.

定理 2　当 $0<p_1<p_2<\infty, 0<q_1,q_2<\infty$ 或 $0<p_1=p_2<\infty, 0<q_1\leqslant q_2<\infty$ 时，若有

$$g(z)(1-|z|^2)^{\frac{n+1+\alpha_2}{q_2}-\frac{n+1+\alpha_1}{q_1}+n(\frac{1}{p_2}-\frac{1}{p_1})}\in L^\infty(B_n),$$

则算子 $M_g: HT^{p_1}_{q_1,\alpha_1}(B_n)\to HT^{p_2}_{q_2,\alpha_2}(B_n)$ 有界.

证明　$p_1<p_2$ 时，存在 p，使得 $p_1<p<p_2$. 由 $\|f\|_{H^t}\leqslant\|Rf\|_{A^p_{p-n-1+np/t}}$[8] 及 $\|f\|_{H^t}\simeq\|R^{s,t}f\|_{HT^p_{2,2t-1-n}}$[7]，选取适当的 s 和 t，可得 $\|f\|_{HT^{p_2}_{q_2,\alpha_2}}\leqslant C\|Rf\|_{A^p_\beta}$，其中 $\beta=\dfrac{np}{p_2}-n-1+\dfrac{p(n+1+\alpha_2+q_2)}{q_2}$，再由 $\|Rf\|_{A^p_\beta}\sim\|f\|_{A^p_{\beta-p}}$[13]，并令 $\eta=\dfrac{np}{p_1}-n-1+\dfrac{p(n+1+\alpha_1)}{q_1}$，根据引理 2 可得

$$\|M_gf\|^{p_2}_{HT^{p_2}_{q_2,\alpha_2}}\leqslant C\|R(M_gf)\|^{p_2}_{A^p_\beta}\leqslant C\|M_gf\|^{p_2}_{A^p_{\beta-p}}=$$

$$\left(\int_{B_n}|f(z)g(z)|^p(1-|z|^2)^{\frac{np}{p_2}-n-1+\frac{p(n+1+\alpha_2)}{q_2}}\mathrm{d}v(z)\right)^{p_2/p}\leqslant$$

$$\sup_{z\in B_n}|g(z)|^{p_2}(1-|z|^2)^{p_2\left[\frac{n+1+\alpha_2}{q_2}-\frac{n+1+\alpha_1}{q_1}+n\left(\frac{1}{p_2}-\frac{1}{p_1}\right)\right]}\left(\int_{B_n}|f(z)|^p(1-|z|^2)^{\frac{np}{p_1}-n-1+\frac{p(n+1+\alpha_1)}{q_1}}\mathrm{d}v(z)\right)^{p_2/p}\leqslant$$
$$C\|f\|_{A^p_\eta}^{p_2}\leqslant C\|f\|_{HT^{p_1}_{q_1,\alpha_1}}^{p_2}.$$

当 $p_1=p_2$ 且 $q_1\leqslant q_2$ 时,令 $\alpha'=\dfrac{q_2(n+1+\alpha_1)}{q_1}-n-1$,由引理 3 可得

$$\|M_gf\|_{HT^{p_2}_{q_2,\alpha_2}}^{p_2}=\int_{S_n}\left(\int_{\Gamma(\xi)}|f(z)|^{q_2}|g(z)|^{q_2}(1-|z|^2)^{\alpha_2}\mathrm{d}v(z)\right)^{p_2/q_2}\mathrm{d}\sigma(\xi)\leqslant$$
$$\sup_{z\in B_n}|g(z)|^{p_2}(1-|z|^2)^{p_2\left(\frac{n+1+\alpha_2}{q_2}-\frac{n+1+\alpha_1}{q_1}\right)}\int_{S_n}\left(\int_{\Gamma(\xi)}|f(z)|^{q_2}(1-|z|^2)^{\alpha'}\mathrm{d}v(z)\right)^{p_2/q_2}\mathrm{d}\sigma(\xi)\leqslant$$
$$C\|f\|_{HT^{p_2}_{q_2,\alpha'}}^{p_2}\leqslant C\|f\|_{HT^{p_1}_{q_1,\alpha_1}}^{p_2}.$$

下面定理给出其他情形下乘积算子有界的充要条件.

定理 3 设 $0<p_1,p_2,q_1,q_2<\infty,\alpha_1,\alpha_2>-n-1$,算子 $M_g:HT^{p_1}_{q_1,\alpha_1}(B_n)\to HT^{p_2}_{q_2,\alpha_2}(B_n)$有界的充分必要条件是:

(1) 当 $p_1>p_2$ 且 $q_1>q_2$ 时,$g(z)(1-|z|^2)^{\frac{\alpha_2}{q_2}-\frac{\alpha_1}{q_1}}\in T^{p_1p_2/(p_1-p_2)}_{q_1q_2/(q_1-q_2)}(B_n)$;

(2) 当 $p_1>p_2$ 且 $q_1\leqslant q_2$ 时,$g(z)(1-|z|^2)^{\frac{n+1+\alpha_2}{q_2}-\frac{n+1+\alpha_1}{q_1}}\in T^{p_1p_2/(p_1-p_2)}_{\infty}(B_n)$;

(3) 当 $p_1=p_2$ 且 $q_1>q_2$ 时,$g(z)(1-|z|^2)^{\frac{\alpha_2}{q_2}-\frac{\alpha_1}{q_1}}\in T^{\infty}_{q_1q_2/(q_1-q_2)}(B_n)$.

证明 先证必要性. 设 $r>0$ 且充分小,$Z=\{a_k\}$为$\mathbb{B}_n$中的 r-格,$\lambda=\{\lambda_k\}\in T^{p_1}_{q_1}(Z)$,$\{\varphi_k(t)\}$为定义在[0,1]上的 Rademacher 函数列[14],取 $\theta>n\max\left(1,\dfrac{q_1}{p_1},\dfrac{1}{p_1},\dfrac{1}{q_1}\right)$,选取 $HT^{p_1}_{q_1,\alpha_1}(B_n)$中的测试函数

$$F_t(z)=\sum_{k=1}^{\infty}\lambda_k\varphi_k(t)\frac{(1-|a_k|^2)^\theta}{(1-\langle z,a_k\rangle)^{\theta+\frac{n+1+\alpha_1}{q_1}}},$$

则由 $M_g:HT^{p_1}_{q_1,\alpha_1}(B_n)\to HT^{p_2}_{q_2,\alpha_2}(B_n)$有界及引理 4 可得

$$\|M_gF_t\|_{HT^{p_2}_{q_2,\alpha_2}}^{p_2}=\int_{S_n}\left(\int_{\Gamma(\xi)}|M_gF_t(z)|^{q_2}(1-|z|^2)^{\alpha_2}\mathrm{d}v(z)\right)^{p_2/q_2}\mathrm{d}\sigma(\xi)\leqslant$$
$$C\|M_g\|^{p_2}\|F_t\|_{HT^{p_1}_{q_1,\alpha_1}}^{p_2}\leqslant C\|M_g\|^{p_2}\|\lambda\|_{T^{p_1}_{q_1}(Z)}^{p_2},$$

代入 F_t 的表达式,对 t 从 0 到 1 积分,并利用 Fubini 定理,可得

$$\int_{S_n}\int_0^1\left(\int_{\Gamma(\xi)}\left|g(z)\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\lambda_k\varphi_k(t)(1-|a_k|^2)^\theta}{(1-\langle z,a_k\rangle)^{\theta+\frac{n+1+\alpha_1}{q_1}}}\right|^{q_2}(1-|z|^2)^{\alpha_2}\mathrm{d}v(z)\right)^{p_2/q_2}\mathrm{d}t\,\mathrm{d}\sigma(\xi)\leqslant$$
$$C\|M_g\|^{p_2}\|\lambda\|_{T^{p_1}_{q_1}(Z)}^{p_2}.$$

利用 Kahane 不等式[15]和 Khinchine 不等式[14],可得

$$\int_{S_n}\left[\int_{\Gamma(\xi)}\left(\sum_{k=1}^{\infty}\frac{|\lambda_k|^2(1-|a_k|^2)^{2\theta}}{|1-\langle z,a_k\rangle|^{2\theta+\frac{2(n+1+\alpha_1)}{q_1}}}\right)^{q_2/2}|g(z)|^{q_2}(1-|z|^2)^{\alpha_2}\mathrm{d}v(z)\right]^{p_2/q_2}\mathrm{d}\sigma(\xi)\leqslant$$
$$C\|M_g\|^{p_2}\|\lambda\|_{T^{p_1}_{q_1}(Z)}^{p_2},\tag{2}$$

再令

$$\mu_k=|g(a_k)|(1-|a_k|^2)^{\frac{n+1+\alpha_2}{q_2}-\frac{n+1+\alpha_1}{q_1}},$$

则由次调和性及(1)式,有

$$\int_{S_n}\left(\sum_{a_k\in\Gamma(\xi)}|\lambda_k|^{q_2}|\mu_k|^{q_2}\right)^{p_2/q_2}\mathrm{d}\sigma(\xi)=$$
$$\int_{S_n}\left(\sum_{a_k\in\Gamma(\xi)}|\lambda_k|^{q_2}|g(a_k)|^{q_2}(1-|a_k|^2)^{n+1+\alpha_2-\frac{q_2(n+1+\alpha_1)}{q_1}}\right)^{p_2/q_2}\mathrm{d}\sigma(\xi)\leqslant$$

$$C\int_{S_n}\left(\sum_{a_k\in\Gamma(\xi)}|\lambda_k|^{q_2}\int_{D(a_k,4r)}|g(z)|^{q_2}\frac{(1-|z|^2)^{\alpha_2}(1-|a_k|^2)^{q_2\theta}}{|1-\langle z,a_k\rangle|^{q_2\theta+\frac{q_2(n+1+\alpha_1)}{q_1}}}\right)^{p_2/q_2}\mathrm{d}\sigma(\xi)\leqslant$$

$$C\int_{S_n}\left(\int_{\Gamma(\xi)}\sum_{k=1}^{\infty}|\lambda_k|^{q_2}\frac{(1-|a_k|^2)^{q_2\theta}}{|1-\langle z,a_k\rangle|^{q_2\theta+\frac{q_2(n+1+\alpha_1)}{q_1}}}\chi_{D(a_k,4r)}(z)\cdot|g(z)|^{q_2}(1-|z|^2)^{\alpha_2}\mathrm{d}v(z)\right)^{p_2/q_2}\mathrm{d}\sigma(\xi),\tag{3}$$

其中:$\chi_{D(a_k,4r)}$表示集合 $D(a_k,4r)$的特征函数. 当 $q_2<2$ 时,由 Hölder 不等式并结合 r-格的性质,可得

$$\sum_{k=1}^{\infty}|\lambda_k|^{q_2}\frac{(1-|a_k|^2)^{q_2\theta}}{|1-\langle z,a_k\rangle|^{q_2\theta+\frac{q_2(n+1+\alpha_1)}{q_1}}}\chi_{D(a_k,4r)}(z)\leqslant C\left(\sum_{k=1}^{\infty}|\lambda_k|^2\frac{(1-|a_k|^2)^{2\theta}}{|1-\langle z,a_k\rangle|^{2\theta+\frac{2(n+1+\alpha_1)}{q_1}}}\right)^{q_2/2}.\tag{4}$$

当 $q_2\geqslant 2$ 时,由 $\|\cdot\|_{l^{q_2}}\leqslant\|\cdot\|_{l^2}$ 也可得(4)式成立. 结合(2),(3),(4)式,有

$$\int_{S_n}\Big(\sum_{a_k\in\Gamma(\xi)}|\lambda_k|^{q_2}|\mu_k|^{q_2}\Big)^{p_2/q_2}\mathrm{d}\sigma(\xi)\leqslant C\|M_g\|^{p_2}\|\lambda\|^{p_2}_{T^{p_1}_{q_1}(Z)}.\tag{5}$$

(1) 当 $p_1>p_2$ 且 $q_1>q_2$ 时,任取 s 足够大,使得 $q_2s>1$ 且 $p_2s>1$,下证$\{\mu_k^{1/s}\}\in T^{p_1p_2s/(p_1-p_2)}_{q_1q_2s/(q_1-q_2)}(Z)$.

由引理 5,6,有

$$T^{p_1p_2s/(p_1-p_2)}_{q_1q_2s/(q_1-q_2)}(Z)=(T^{p_1p_2s/(p_1p_2s-p_1+p_2)}_{q_1q_2s/(q_1q_2s-q_1+q_2)}(Z))^*=(T^{p_2s/(p_2s-1)}_{q_2s/(q_2s-1)}(Z)\cdot T^{p_1s}_{q_1s}(Z))^*.$$

任取 $v=\{v_k\}\in T^{p_1p_2s/(p_1p_2s-p_1+p_2)}_{q_1q_2s/(q_1q_2s-q_1+q_2)}(Z)$,分解为 $v_k=\rho_k\cdot\lambda_k^{1/s}$,其中 $\rho=\{\rho_k\}\in T^{p_2s/(p_2s-1)}_{q_2s/(q_2s-1)}(Z)$,$\{\lambda_k^{1/s}\}\in T^{p_1s}_{q_1s}(Z)$,即有 $\lambda=\{\lambda_k\}\in T^{p_1}_{q_1}(Z)$,且 $\|\{\lambda_k^{1/s}\}\|_{T^{p_1s}_{q_1s}(Z)}=\|\lambda\|^{1/s}_{T^{p_1}_{q_1}(Z)}$. 由 Hölder 不等式以及(5)式可得

$$\sum_k|v_k\mu_k^{1/s}|(1-|a_k|^2)^n\simeq\int_{S_n}\Big(\sum_{a_k\in\Gamma(\xi)}|\rho_k||\lambda_k|^{1/s}|\mu_k|^{1/s}\Big)\mathrm{d}\sigma(\xi)\leqslant$$

$$\int_{S_n}\Big(\sum_{a_k\in\Gamma(\xi)}|\rho_k|^{\frac{q_2s}{q_2s-1}}\Big)^{\frac{q_2s-1}{q_2s}}\cdot\Big(\sum_{a_k\in\Gamma(\xi)}|\lambda_k|^{q_2}|\mu_k|^{q_2}\Big)^{\frac{1}{q_2s}}\mathrm{d}\sigma(\xi)\leqslant$$

$$\left(\int_{S_n}\Big(\sum_{a_k\in\Gamma(\xi)}|\rho_k|^{\frac{q_2s}{q_2s-1}}\Big)^{\frac{q_2s-1}{q_2s}\cdot\frac{p_2s}{p_2s-1}}\mathrm{d}\sigma(\xi)\right)^{\frac{p_2s-1}{p_2s}}\cdot\left(\int_{S_n}\Big(\sum_{a_k\in\Gamma(\xi)}|\lambda_k|^{q_2}|u_k|^{q_2}\Big)^{\frac{p_2}{q_2}}\mathrm{d}\sigma(\xi)\right)^{\frac{1}{p_2s}}\leqslant$$

$$C\|\rho\|_{T^{p_2s/(p_2s-1)}_{q_2s/(q_2s-1)}(Z)}\|\lambda\|^{1/s}_{T^{p_1}_{q_1}(Z)}\|M_g\|^{1/s}=\|v\|_{T^{p_1p_2s/(p_1p_2s-p_1+p_2)}_{q_1q_2s/(q_1q_2s-q_1+q_2)}(Z)}\|M_g\|^{1/s}.$$

由对偶性可得$\{\mu_k^{1/s}\}\in T^{p_1p_2s/(p_1-p_2)}_{q_1q_2s/(q_1-q_2)}(Z)$,即有$\{\mu_k\}\in T^{p_1p_2/(p_1-p_2)}_{q_1q_2/(q_1-q_2)}(Z)$. 最后证明

$$g(z)(1-|z|^2)^{\frac{\alpha_2}{q_2}-\frac{\alpha_1}{q_1}}\in T^{p_1p_2/(p_1-p_2)}_{q_1q_2/(q_1-q_2)}(B_n),$$

再由参考文献[8]中引理 2,有

$$\int_{S_n}\left[\int_{\Gamma(\xi)}|g(z)|^{\frac{q_1q_2}{q_1-q_2}}(1-|z|^2)^{\left(\frac{\alpha_2}{q_2}-\frac{\alpha_1}{q_1}\right)\frac{q_1q_2}{q_1-q_2}}\mathrm{d}v(z)\right]^{\frac{p_1p_2}{p_1-p_2}\cdot\frac{q_1-q_2}{q_1q_2}}\mathrm{d}\sigma(\xi)\simeq$$

$$\int_{S_n}\Big[\sum_{a_k\in\Gamma(\xi)}|g(a_k)|^{\frac{q_1q_2}{q_1-q_2}}(1-|a_k|^2)^{\left(\frac{\alpha_2}{q_2}-\frac{\alpha_1}{q_1}\right)\frac{q_1q_2}{q_1-q_2}+n+1}\Big]^{\frac{p_1p_2}{p_1-p_2}\cdot\frac{q_1-q_2}{q_1q_2}}\mathrm{d}\sigma(\xi)\simeq$$

$$\int_{S_n}\Big(\sum_{a_k\in\Gamma(\xi)}|\mu_k|^{\frac{q_1q_2}{q_1-q_2}}\Big)^{\frac{p_1p_2}{p_1-p_2}\cdot\frac{q_1-q_2}{q_1q_2}}\mathrm{d}\sigma(\xi)<\infty.$$

(2) 当 $p_1>p_2$ 且 $q_1\leqslant q_2$ 时,先证 $\mu=\{\mu_k\}\in T^{p_1p_2/(p_1-p_2)}_{\infty}(Z)$,即证 $\mu=\{\mu_k^{1/s}\}\in T^{p_1p_2s/(p_1-p_2)}_{\infty}(Z)$,其中 s 为足够大的数,使得 $q_2s>1$ 且 $p_2s>1$. 由于 $q_1\leqslant q_2$,则存在某个 $\varepsilon\leqslant 1$,使得$\dfrac{q_2s-1}{q_2s}+\dfrac{1}{q_1s}=\dfrac{1}{\varepsilon}$. 由引理 5,6 可得

$$T^{p_1p_2s/(p_1-p_2)}_{\infty}(Z)=(T^{p_1p_2s/(p_1p_2s-p_1+p_2)}_{\varepsilon}(Z))^*=(T^{p_2s/(p_2s-1)}_{q_2s/(q_2s-1)}(Z)\cdot T^{p_1s}_{q_1s}(Z))^*.$$

采用(1)中方法,根据序列型 Tent 空间的对偶性可证得 $\mu\in T^{p_1p_2/(p_1-p_2)}_{\infty}(Z)$. 再由文献[8],有

$$\int_{S_n}\sup_{z\in\Gamma(\xi)}|g(z)|^{\frac{p_1p_2}{p_1-p_2}}(1-|z|^2)^{\left(\frac{n+1+\alpha_2}{q_2}-\frac{n+1+\alpha_1}{q_1}\right)\frac{p_1p_2}{p_1-p_2}}\mathrm{d}\sigma(\xi)\leqslant C\int_{S_n}\sup_{a_k\in\Gamma(\xi)}|\mu_k|^{\frac{p_1p_2}{p_1-p_2}}\mathrm{d}\sigma(\xi),$$

即证得 $g(z)(1-|z|^2)^{\frac{n+1+\alpha_2}{q_2}-\frac{n+1+\alpha_1}{q_1}}\in T^{p_1p_2/(p_1-p_2)}_{\infty}(B_n)$.

(3) 当 $p_1=p_2$ 且 $q_1>q_2$ 时,先证$\{\mu_k^{1/s}\}\in T^{\infty}_{q_1q_2s/(q_1-q_2)}(Z)$. 由引理5,6可得

$$T^{\infty}_{q_1q_2s/(q_1-q_2)}(Z)=(T^{1}_{q_1q_2s/(q_1q_2s-q_1+q_2)}(Z))^{*}=(T^{p_2s/(p_2s-1)}_{q_2s/(q_2s-1)}(Z)\cdot T^{p_1s}_{q_1s}(Z))^{*},$$

同理,根据对偶性可证得 $\mu\in T^{\infty}_{q_1q_2/(q_1-q_2)}(Z)$. 再根据文献[16]可证得 $g(z)(1-|z|^2)^{\frac{\alpha_2}{q_2}-\frac{\alpha_1}{q_1}}\in T^{\infty}_{q_1q_2/(q_1-q_2)}(B_n)$.

下面证明充分性. 当 $p_1>p_2$ 且 $q_1>q_2$ 时,两次利用 Hölder 不等式,并由条件可得

$$\|M_gf\|^{p_2}_{HT^{p_2}_{q_2,\alpha_2}}\simeq\int_{S_n}\left(\int_{\Gamma(\xi)}|g(z)f(z)|^{q_2}(1-|z|^2)^{\alpha_2}\mathrm{d}v(z)\right)^{p_2/q_2}\mathrm{d}\sigma(\xi)\leqslant$$

$$\int_{S_n}\left(\int_{\Gamma(\xi)}|f(z)|^{q_1}(1-|z|^2)^{\alpha_1}\mathrm{d}v(z)\right)^{\frac{q_2}{q_1}\frac{p_2}{q_2}}\cdot$$

$$\left(\int_{\Gamma(\xi)}|g(z)|^{\frac{q_1q_2}{q_1-q_2}}(1-|z|^2)^{\left(\frac{\alpha_2}{q_2}-\frac{\alpha_1}{q_1}\right)\frac{q_1q_2}{q_1-q_2}}\mathrm{d}v(z)\right)^{\frac{(q_2-q_2)}{q_1}\frac{p_2}{q_2}}\mathrm{d}\sigma(\xi)\leqslant$$

$$\left(\int_{S_n}\left(\int_{\Gamma(\xi)}|f(z)|^{q_1}(1-|z|^2)^{\left(\frac{\alpha_2}{q_2}-\frac{\alpha_1}{q_1}\right)\frac{q_1q_2}{q_1-q_2}}\mathrm{d}v(z)\right)^{\frac{p_2}{q_1}\frac{p_1}{p_2}}\mathrm{d}\sigma(\xi)\right)^{p_2/p_1}\cdot$$

$$\left(\int_{S_n}\left(\int_{\Gamma(\xi)}|g(z)|^{\frac{q_1q_2}{q_1-q_2}}(1-|z|^2)^{\left(\frac{\alpha_2}{q_2}-\frac{\alpha_1}{q_1}\right)\frac{q_1q_2}{q_1-q_2}}\mathrm{d}v(z)\right)^{\frac{p_2(q_2-q_2)}{q_1q_2}\frac{p_1}{p_1-p_2}}\mathrm{d}\sigma(\xi)\right)^{\frac{p_1-p_2}{p_1}}\leqslant C\|f\|^{p_2}_{HT^{p_1}_{q_1,\alpha_1}}.$$

当 $p_1>p_2$ 且 $q_1\leqslant q_2$ 时,令 $\alpha'=\dfrac{q_2(n+1+\alpha_1)}{q_1}-n-1$,由 Hölder 不等式及引理3可得

$$\|M_gf\|^{p_2}_{HT^{p_2}_{q_2,\alpha_2}}\simeq\int_{S_n}(\int_{\Gamma(\xi)}|g(z)f(z)|^{q_2}(1-|z|^2)^{\alpha_2}\mathrm{d}v(z))^{p_2/q_2}\mathrm{d}\sigma(\xi)\leqslant$$

$$\int_{S_n}\left(\int_{\Gamma(\xi)}|f(z)|^{q_2}(1-|z|^2)^{\alpha'}\mathrm{d}v(z)\right)^{p_2/q_2}(\sup_{z\in\Gamma(\xi)}|g(z)|^{q_2}(1-|z|^2)^{\alpha_2-\alpha'})^{p_2/q_2}\mathrm{d}\sigma(\xi)\leqslant$$

$$\left(\int_{S_n}\left(\int_{\Gamma(\xi)}|f(z)|^{q_2}(1-|z|^2)^{\alpha'}\mathrm{d}v(z)\right)^{\frac{p_2}{q_2}\frac{p_1}{p_2}}\mathrm{d}\sigma(\xi)\right)^{\frac{p_2}{p_1}}\cdot$$

$$\left(\int_{S_n}\sup_{z\in\Gamma(\xi)}|g(z)|^{\frac{p_1p_2}{p_1-p_2}}(1-|z|^2)^{\left(\frac{n+1+\alpha_2}{q_2}-\frac{n+1+\alpha_1}{q_2}\right)\frac{p_1p_2}{p_1-p_2}}\mathrm{d}\sigma(\xi)\right)^{\frac{p_1-p_2}{p_1}}\leqslant$$

$$C\|f\|^{p_2}_{HT^{p_1}_{q_2,\alpha'}}\leqslant C\|f\|^{p_2}_{HT^{p_1}_{q_1,\alpha_1}}.$$

当 $p_1=p_2$ 且 $q_1>q_2$ 时,由 Hölder 不等式及条件 $g(z)(1-|z|^2)^{\frac{\alpha_2}{q_2}-\frac{\alpha_1}{q_1}}\in T^{\infty}_{q_1q_2/(q_1-q_2)}(B_n)$可得

$$\|M_gf\|^{p_2}_{HT^{p_2}_{q_2,\alpha_2}}\simeq\int_{S_n}\left(\int_{\Gamma(\xi)}|g(z)f(z)|^{q_2}(1-|z|^2)^{\alpha_2}\mathrm{d}v(z)\right)^{p_2/q_2}\mathrm{d}\sigma(\xi)\leqslant$$

$$\int_{S_n}\left(\int_{\Gamma(\xi)}|f(z)|^{q_1}(1-|z|^2)^{\alpha_1}\mathrm{d}v(z)\right)^{\frac{q_2}{q_1}\frac{p_2}{q_2}}\cdot$$

$$\left(\int_{\Gamma(\xi)}|g(z)|^{\frac{q_1q_2}{q_1-q_2}}(1-|z|^2)^{\left(\frac{\alpha_2}{q_2}-\frac{\alpha_1}{q_1}\right)\frac{q_1q_2}{q_1-q_2}}\mathrm{d}v(z)\right)^{\frac{(q_2-q_2)}{q_1}\frac{p_2}{q_2}}\mathrm{d}\sigma(\xi)\leqslant C\|f\|^{p_2}_{HT^{p_1}_{q_1,\alpha_1}},$$

证毕.

由定理3的证明过程可以看出,算子 M_g 的有界性还可借助于序列型 Tent 空间给出离散形式的刻画,它具有独立的实用意义,故结合定理1~3的证明,给出所有参数 $0<p_1,p_2,q_1,q_2<\infty$对应的乘积算子 $M_g:HT^{p_1}_{q_1,\alpha_1}(B_n)\to HT^{p_2}_{q_2,\alpha_2}(B_n)$有界的离散形式的等价刻画,即定理4.

定理4 设 $0<p_1,p_2,q_1,q_2<\infty,\alpha_1,\alpha_2>-n-1$,任意 $r\in(0,1)$,$Z=\{a_k\}$为$\mathbb{B}_n$中的r-格,令

$$\mu_k=|g(a_k)|(1-|a_k|^2)^{\frac{n+1+\alpha_2}{q_2}-\frac{n+1+\alpha_1}{q_1}},$$

则算子 $M_g:HT^{p_1}_{q_1,\alpha_1}(B_n)\to HT^{p_2}_{q_2,\alpha_2}(B_n)$有界的充要条件为:

(1) 当 $p_1>p_2$ 且 $q_1>q_2$ 时,$\mu=\{\mu_k\}\in T^{p_1p_2/(p_1-p_2)}_{q_1q_2/(q_1-q_2)}(Z)$;

(2) 当 $p_1>p_2$ 且 $q_1\leqslant q_2$ 时,$\mu=\{\mu_k\}\in T^{p_1p_2/(p_1-p_2)}_{\infty}(Z)$;

（3）当 $p_1=p_2$ 且 $q_1>q_2$ 时，$\mu=\{\mu_k\}\in T^{\infty}_{q_1q_2/(q_1-q_2)}(Z)$；

（4）当 $p_1<p_2$ 或者 $p_1=p_2$ 且 $q_1\leqslant q_2$ 时，$\{\mu_k(1-|a_k|^2)^{n(1/p_2-1/p_1)}\}\in l^{\infty}$.

参考文献：

[1] DONG Y B，GAO Y X，LI L，et al. Multiplication operators on the Bloch space of infinite dimensional bounded symmetric domains[J]. Complex Analysis and Operator Theory，2022，16 (1)：1-14.

[2] 陈志，江治杰. 加权 Bergman 空间到 Bloch-Orlicz 空间上的乘积型算子[J]. 四川大学学报（自然科学版），2020，57 (5)：857-864.

[3] GUZMÁN-PARTIDA M. Compactness of multiplication operators on Riesz bounded variation spaces[J]. Tatra Mountains Mathematical Publications，2021，78 (1)：167-174.

[4] 黄喜娇，肖祥春. 有界线性算子 L 在 g-Besselian 框架的应用[J]. 安徽大学学报（自然科学版），2020，44 (4)：33-37.

[5] 孙志玲. 多圆盘 Bergman 空间上 Toeplitz 算子的乘积和交换性[J]. 数学物理学报，2020，40 (2)：304-314.

[6] COIFMAN R R，MEYER Y，STEIN E M. Some new function spaces and their applications to harmonic analysis[J]. Journal of Functional Analysis，1985，62 (2)：304-335.

[7] PERÄLÄ A. Duality of holomorphic Hardy type tent spaces[EB/OL]. [2022-05-28]. https://arxiv.org/abs/1803.10584.

[8] MIIHKINEN S，PAU J，PERÄLÄ A，et al. Volterra type integration operators from Bergman spaces to Hardy spaces[J]. Journal of Functional Analysis，2020，279 (4)：108564.

[9] PAU J. Integration operators between Hardy spaces on the unit ball of $\mathbb{C}^n$ [J]. Journal of Functional Analysis，2016 ，270 (1)：134-176.

[10] WANG M F，ZHOU L. Embedding derivatives and integration operators on Hardy type tent spaces[J]. Acta Mathematica Sinica (English Series)，2022 (6)：1-25.

[11] PELÁEZ J Á，RÄTTYÄ J. Embedding theorems for Bergman spaces via harmonic analysis[J]. Mathematische Annalen，2015，362 (1)：205-239.

[12] 胡蓉. Hardy 空间上的 Volterra 型积分算子[J]. 贵州大学学报（自然科学版），2022，39 (3)：15-19.

[13] ZHU K H. Spaces of holomorphic functions in the unit ball[M]. New York：Springer-Verlag，2005.

[14] DUREN P L. Theory of H^p spaces[M]. New York：Academic Press，1970.

[15] LUECKING D H. Embedding theorems for spaces of analytic functions via Khinchine's inequality[J]. Michigan Mathematical Journal，1993，40 (2)：333-358.

[16] HU R，QIN C，ZHOU L. Volterra integration operators from Hardy type tent spaces to Hardy spaces[J]. Journal of Inequalities and Applications，2022 (1)：1-19.

（责任编辑　朱夜明）