doi:10.3969/j.issn.1000-2162.2024.02.002

矩形上全组合偏差的极值问题

冯小高,刘初玥,唐茹月
(西华师范大学 数学与信息学院,四川 南充 637002)

摘　要:根据 Kalaj 在圆环上给出的全组合偏差定义,给出了矩形上全组合偏差和组合偏差的定义. 同时,在从矩形到矩形上并保持端点的所有同胚映射类中,分别考虑了组合偏差和全组合偏差的极值问题,利用面积长度方法和均值不等式证明了仿射映射为此两类极值问题的唯一解. 该结果推广了相关文献的结果.

关键词:全组合偏差;组合偏差;极值问题;仿射映射
中图分类号:O174.55　　**文献标志码**:A　　**文章编号**:1000-2162(2024)02-0008-06

The extremal problem for total combined distortion between rectangles

FENG Xiaogao, LIU Chuyue, TANG Ruyue
(College of Mathematic and Information, China West Normal University, Nanchong 637002, China)

Abstract: On the basis of total combined distortion defined by Kalaj, we gave the definitions of total combined distortion and combined distortion between rectangles. Meanwhile, in view of area length method and mean inequality, we considered the extremal problems for combined distortion and total combined distortion of deformation between rectangles keeping vertices respectively, and obtained affine mapping is the unique extremal mapping. This extended the main result obtained by the other author.

Keywords: total combined distortion; combined distortion; extremal problem; affine mapping

在 20 世纪 40 年代,Teichmüller 研究了极值拟共形映射,从此产生了 Teichmüller 空间理论. Grötzsch[1]提出了著名的 Grötzsch 极值问题并利用面积长度方法解决了此问题. 随后,很多学者对极值问题进行了研究和推广. Astala 等[2-3]将 Grötzsch 极值问题推广到线性偏差函数和偏差函数的 L^1 可积的情形及圆环上对应的情形. Martin 等[4]及 Feng 等[5]对其他一些更一般情形进行了研究.

Iwaniec 等[6]研究了圆环上关于全偏差的极值问题. Chen 等[7]把该结果推广到高维情形. 冯小高[8]也研究了矩形上的对应情况. Kalaj[9]研究了更一般的关于全组合能量的极值问题.

论文在文献[6,8-9]的研究基础上,给出矩形上组合偏差和全组合偏差极值问题解的存在性和唯一性.

收稿日期:2022-08-10
基金项目:国家自然科学基金资助项目(11701459,12271218)
作者简介:冯小高(1982－),男,四川南充人,西华师范大学副教授,硕士生导师,博士,E-mail: fengxiaogao603@163.com.

1　准备工作

对两不同的正常数 l 和 L，$Q_1=[0,l]\times[0,1]$ 和 $Q_2=[0,L]\times[0,1]$ 为复平面上两个矩形. 假设 $\wp(Q_1,Q_2)$ 表示从矩形 Q_1 到矩形 Q_2 并保持端点的所有同胚映射的集合.

定义 1　对实数 $a>0$ 和 $b>0$，$h\in\wp(Q_1,Q_2)$，称积分

$$E_{[a,b]}(z,h)=\iint_{Q_1}(a^2|h_x|^2+b^2|h_y|^2)\mathrm{d}x\mathrm{d}y \tag{1}$$

为映射 h 的组合能量.

注 1　根据定义易知，当 $a=b=1$ 时，(1)为经典的 Dirichlet 能量.

定义 2　对实数 $a>0$ 和 $b>0$，$h\in\wp(Q_1,Q_2)$，称积分

$$K_{[a,b]}(z,h)=\iint_{Q_1}\frac{a^2\mid\nabla\mathrm{Re}h\mid^2+b^2\mid\nabla\mathrm{Im}h\mid^2}{J(z,h)}\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\iint_{Q_1}\frac{a^2\mid\nabla u\mid^2+b^2\mid\nabla v\mid^2}{J(z,h)}\mathrm{d}x\mathrm{d}y \tag{2}$$

为映射 h 的组合偏差，其中：$h(z)=u(x,y)+\mathrm{i}v(x,y)$，$z=x+\mathrm{i}y$，$\nabla u$ 和 ∇v 分别表示 $u(x,y)$ 和 $v(x,y)$ 的梯度.

注 2　当 $a=b=1$ 时，称

$$\frac{\mid\nabla\mathrm{Re}h\mid^2+\mid\nabla\mathrm{Im}h\mid^2}{J(z,h)}=\frac{\mid\nabla u\mid^2+\mid\nabla v\mid^2}{J(z,h)}=\frac{1}{2}\,\frac{\mid h_z\mid^2+\mid h_{\bar{z}}\mid^2}{J(z,h)}$$

为映射 h 的偏差函数.

定义 3　对实数 $a>0$ 和 $b>0$，$h\in\wp(Q_1,Q_2)$，称积分

$$\begin{aligned}\Lambda_{[a,b]}(h,h^{-1})=\alpha\iint_{Q_2}\frac{a^2\mid\nabla\mathrm{Im}h^{-1}\mid^2+b^2\mid\nabla\mathrm{Re}h^{-1}\mid^2}{J(w,h^{-1})}\mathrm{d}u\mathrm{d}v+\\ \beta\iint_{Q_1}\frac{a^2\mid\nabla\mathrm{Im}h\mid^2+b^2\mid\nabla\mathrm{Re}h\mid^2}{J(z,h)}\mathrm{d}x\mathrm{d}y\end{aligned} \tag{3}$$

为映射 h 的全组合偏差，其中：h^{-1} 为 h 的逆映射，$w=u+\mathrm{i}v$，α 和 β 为正实数，$J(z,h)$ 为 h 的 Jacobi 行列式.

注 3　当 $a=b=1$ 时，(3)式为矩形上全偏差[8].

针对(1)～(3)式，论文主要在集合 $\wp(Q_1,Q_2)$ 中研究下面 3 个极值问题：

(i) 寻找满足 $\inf\limits_{h\in\wp(Q_1,Q_2)}E_{[a,b]}(z,h)$ 的唯一极值映射 $h^*(z)$.

(ii) 寻找满足 $\inf\limits_{h\in\wp(Q_1,Q_2)}K_{[a,b]}(z,h)$ 的唯一极值映射 $h^*(z)$.

(iii) 寻找满足 $\inf\limits_{h\in\wp(Q_1,Q_2)}\Lambda_{[a,b]}(h,h^{-1})$ 的唯一极值映射 $h^*(z)$.

问题(i)在文献[10]中已解决，并得到仿射映射 $h^*(x+\mathrm{i}y)=\dfrac{L}{l}x+\mathrm{i}y$ 为其唯一极值映射. 作者主要研究问题(ii)，(iii)极值映射的存在性和唯一性.

2　组合能量和组合偏差的关系

定理 1　若 $h\in\wp(Q_1,Q_2)$，令 $g=h^{-1}$，那么

$$\iint_{Q_2}\frac{a^2\mid\nabla\mathrm{Im}g\mid^2+b^2\mid\nabla\mathrm{Re}g\mid^2}{J(w,g)}\mathrm{d}u\mathrm{d}v=\iint_{Q_1}(a^2\mid h_x\mid^2+b^2\mid h_y\mid^2)\mathrm{d}x\mathrm{d}y. \tag{4}$$

证明　假设 $h(x+\mathrm{i}y)=w=u+\mathrm{i}v$，两边同时分别关于 u 和 v 求偏导数可得

$$\begin{cases}h_x x_u+h_y\mathrm{i}y_u=1,\\ h_x x_v+h_y\mathrm{i}y_v=\mathrm{i}.\end{cases} \tag{5}$$

(5)式解得

$$\begin{cases} h_x = \dfrac{y_v - \mathrm{i}y_u}{x_u y_v - x_v y_u}, \\ h_y = \dfrac{x_u + \mathrm{i}x_v}{x_u y_v - x_v y_u}. \end{cases} \tag{6}$$

由于

$$\begin{cases} J(w,g) = x_u y_v - x_v y_u, \\ |\nabla x|^2 = x_u^2 + x_v^2, \\ |\nabla y|^2 = y_u^2 + y_v^2, \end{cases}$$

则根据(6)式可得

$$\iint_{Q_1} (a^2 |h_x|^2 + b^2 |h_y|^2) \mathrm{d}x\mathrm{d}y = \iint_{Q_2} \left[a^2 \frac{y_u^2 + y_v^2}{J^2(w,g)} + b^2 \frac{x_u^2 + x_v^2}{J^2(w,g)}\right] J(w,g) \mathrm{d}u\mathrm{d}v =$$

$$\iint_{Q_2} \frac{a^2 |\nabla y|^2 + b^2 |\nabla x|^2}{J(w,g)} \mathrm{d}u\mathrm{d}v = \iint_{Q_2} \frac{a^2 |\nabla \mathrm{Im}g|^2 + b^2 |\nabla \mathrm{Re}g|^2}{J(w,g)} \mathrm{d}u\mathrm{d}v,$$

(4)式得到,证毕.

3 组合偏差的极值问题

定理 2 假设 $h \in \wp(Q_1, Q_2)$,那么

$$K_{[a,b]}(z,h) \geqslant K_{[a,b]}(z,h^*),$$

即

$$\iint_{Q_1} \frac{a^2 |\nabla \mathrm{Re}h|^2 + b^2 |\nabla \mathrm{Im}h|^2}{J(z,h)} \mathrm{d}x\mathrm{d}y \geqslant \iint_{Q_1} \frac{a^2 |\nabla \mathrm{Re}h^*|^2 + b^2 |\nabla \mathrm{Im}h^*|^2}{J(z,h^*)} \mathrm{d}x\mathrm{d}y,$$

等号成立的充要条件为 $h(x+\mathrm{i}y) = h^*(x+\mathrm{i}y) = \dfrac{L}{l}x + \mathrm{i}y$.

证明 由于对任意的 $0<y<1$,有

$$\int_0^l u_x(x+\mathrm{i}y)\mathrm{d}x = u(l+\mathrm{i}y) - u(0+\mathrm{i}y) = L,$$

对上式两边同时关于 y 积分得

$$\iint_{Q_1} u_x(x+\mathrm{i}y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y = L. \tag{7}$$

同理,对任意的 $0<x<l$,有

$$\int_0^1 v_y(x+\mathrm{i}y)\mathrm{d}y = v(x+\mathrm{i}) - v(x+0\mathrm{i}) = 1,$$

那么

$$\iint_{Q_1} v_y(x+\mathrm{i}y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y = l. \tag{8}$$

由(7)和(8)式,根据 Cauchy 不等式可知

$$a^2 l^2 + b^2 L^2 = \iint_{Q_1} (a^2 l v_y + b^2 L u_x) \mathrm{d}x\mathrm{d}y \leqslant \iint_{Q_1} \sqrt{a^2 l^2 + b^2 L^2} \sqrt{a^2 v_y^2 + b^2 u_x^2}\, \mathrm{d}x\mathrm{d}y \leqslant$$

$$\sqrt{a^2 l^2 + b^2 L^2} \iint_{Q_1} \sqrt{a^2(v_x^2 + v_y^2) + b^2(u_x^2 + u_y^2)}\, \mathrm{d}x\mathrm{d}y =$$

$$\sqrt{a^2 l^2 + b^2 L^2} \iint_{Q_1} \frac{\sqrt{a^2(v_x^2 + v_y^2) + b^2(u_x^2 + u_y^2)}}{\sqrt{J(z,h)}} \sqrt{J(z,h)}\, \mathrm{d}x\mathrm{d}y \leqslant$$

$$\sqrt{a^2l^2+b^2L^2}\left(\iint\limits_{Q_1}\frac{a^2(v_x^2+v_y^2)+b^2(u_x^2+u_y^2)}{J(z,h)}\mathrm{d}x\mathrm{d}y\right)^{\frac{1}{2}}\left(\iint\limits_{Q_1}J(z,h)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\right)^{\frac{1}{2}}=$$
$$\sqrt{a^2l^2+b^2L^2}\left(\iint\limits_{Q_1}\frac{a^2(v_x^2+v_y^2)+b^2(u_x^2+u_y^2)}{J(z,h)}\mathrm{d}x\mathrm{d}y\right)^{\frac{1}{2}}(L)^{\frac{1}{2}}. \tag{9}$$

将(9)式两边平方并整理得

$$\iint\limits_{Q_1}\frac{a^2|\nabla v|^2+b^2|\nabla u|^2}{J(z,h)}\mathrm{d}x\mathrm{d}y\geqslant\frac{a^2l^2+b^2L^2}{L}=\iint\limits_{Q_1}\frac{a^2|\nabla\mathrm{Re}h^*|^2+b^2|\nabla\mathrm{Im}h^*|^2}{J(z,h^*)}\mathrm{d}x\mathrm{d}y,$$

即

$$\iint\limits_{Q_1}\frac{a^2|\nabla\mathrm{Re}h|^2+b^2|\nabla\mathrm{Im}h|^2}{J(z,h)}\mathrm{d}x\mathrm{d}y\geqslant\iint\limits_{Q_1}\frac{a^2|\nabla\mathrm{Re}h^*|^2+b^2|\nabla\mathrm{Im}h^*|^2}{J(z,h^*)}\mathrm{d}x\mathrm{d}y. \tag{10}$$

(10)式要取到等号的充要条件为(9)式中不等式取到等号，即

$$l=\lambda_1v_y, L=\lambda_2u_x, v_x=0, u_y=0,$$

其中：λ_1 和 λ_2 为常数.

又根据初始条件 $u(l)=L$ 和 $v(1)=1$，得到

$$u(x+\mathrm{i}y)=\frac{L}{l}x, v(x+\mathrm{i}y)=y,$$

那么

$$h(x+\mathrm{i}y)=h^*(x+\mathrm{i}y)=\frac{L}{l}x+\mathrm{i}y.$$

4　全组合偏差的极值问题

定理 3　假设 $h\in\wp(Q_1,Q_2)$，那么

$$\Lambda_{[a,b]}(h,h^{-1})\geqslant\Lambda_{[a,b]}(h^*,h^{*-1}),$$

即

$$\alpha\iint\limits_{Q_2}\frac{a^2|\nabla\mathrm{Im}h^{-1}|^2+b^2|\nabla\mathrm{Re}h^{-1}|^2}{J(w,h^{-1})}\mathrm{d}u\mathrm{d}v+\beta\iint\limits_{Q_1}\frac{a^2|\nabla\mathrm{Im}h|^2+b^2|\nabla\mathrm{Re}h|^2}{J(z,h)}\mathrm{d}x\mathrm{d}y\geqslant$$
$$\alpha\iint\limits_{Q_2}\frac{a^2|\nabla\mathrm{Im}h^{*-1}|^2+b^2|\nabla\mathrm{Re}h^{*-1}|^2}{J(w,h^{*-1})}\mathrm{d}u\mathrm{d}v+\beta\iint\limits_{Q_1}\frac{a^2|\nabla\mathrm{Im}h^*|^2+b^2|\nabla\mathrm{Re}h^*|^2}{J(z,h^*)}\mathrm{d}x\mathrm{d}y,$$

等号成立的充要条件为 $h(x+\mathrm{i}y)=h^*(x+\mathrm{i}y)=\dfrac{L}{l}x+\mathrm{i}y$.

证明　由定理 1 中(4)式可得

$$\Lambda_{[a,b]}(h,h^{-1})=\alpha\iint\limits_{Q_2}\frac{a^2|\nabla\mathrm{Im}h^{-1}|^2+b^2|\nabla\mathrm{Re}h^{-1}|^2}{J(w,h^{-1})}\mathrm{d}u\mathrm{d}v+$$
$$\beta\iint\limits_{Q_1}\frac{a^2|\nabla\mathrm{Im}h|^2+b^2|\nabla\mathrm{Re}h|^2}{J(z,h)}\mathrm{d}x\mathrm{d}y=$$
$$\iint\limits_{Q_1}\left[\alpha(a^2|h_x|^2+b^2|h_y|^2)+\beta\frac{a^2|\nabla\mathrm{Im}h|^2+b^2|\nabla\mathrm{Re}h|^2}{J(z,h)}\right]\mathrm{d}x\mathrm{d}y. \tag{11}$$

由于对正数 p,q,e 和 f，有如下不等式

$$a^2|h_x|^2+b^2|h_y|^2\geqslant(a^2-b^2p^2)|h_x|^2+(b^2-a^2q^2)|h_y|^2+2abpq|h_x||h_y|, \tag{12}$$

$$\frac{a^2|\nabla\mathrm{Im}h|^2+b^2|\nabla\mathrm{Re}h|^2}{J(z,h)}\geqslant$$
$$\frac{(a^2-b^2e^2)|\nabla\mathrm{Im}h|^2+(b^2-a^2f^2)|\nabla\mathrm{Re}h|^2+2abef|\nabla\mathrm{Im}h||\nabla\mathrm{Re}h|}{J(z,h)}\geqslant$$

$$\frac{(a^2-b^2e^2)\mid\nabla\mathrm{Im}h\mid^2+(b^2-a^2f^2)\mid\nabla\mathrm{Re}h\mid^2+2abefJ(z,h)}{J(z,h)}.\tag{13}$$

下面分两种情形进行讨论:

情形一 在(12)和(13)式中取 $q=\frac{b}{a}$ 和 $e=\frac{a}{b}$,那么对正数 P 和 F,有

$$\begin{aligned}&\alpha(a^2\mid h_x\mid^2+b^2\mid h_y\mid^2)+\beta\frac{a^2\mid\nabla\mathrm{Im}h\mid^2+b^2\mid\nabla\mathrm{Re}h\mid^2}{J(z,h)}\geqslant\\&\alpha[(a^2-b^2p^2)\mid h_x\mid^2+2b^2p\mid h_x\mid\mid h_y\mid]+\beta\frac{(b^2-a^2f^2)\mid\nabla\mathrm{Re}h\mid^2+2a^2fJ(z,f)}{J(z,h)}\geqslant\\&\alpha[(a^2-b^2p^2)\mid h_x\mid^2+2b^2pJ(z,h)]+\beta\frac{(b^2-a^2f^2)\mid\nabla\mathrm{Re}h\mid^2+2a^2fJ(z,h)}{J(z,h)}=\\&\alpha[(a^2-b^2p^2)\mid h_x\mid^2+(a^2-b^2p^2)P^2+2b^2pJ(z,h)-(a^2-b^2p^2)P^2]+\\&\beta\frac{(b^2-a^2f^2)\mid\nabla\mathrm{Re}h\mid^2+(b^2-a^2f^2)F^2J^2(z,h)+2a^2fJ(z,h)-(b^2-a^2f^2)F^2J^2(z,h)}{J(z,h)}\geqslant\\&\alpha[2(a^2-b^2p^2)\mid h_x\mid P+2b^2pJ(z,h)-(a^2-b^2p^2)P^2]+\\&\beta\frac{2(b^2-a^2f^2)\mid\nabla\mathrm{Re}h\mid FJ(z,h)+2a^2fJ(z,h)-(b^2-a^2f^2)F^2J^2(z,h)}{J(z,h)}.\end{aligned}\tag{14}$$

对(14)式两边同时积分得

$$\begin{aligned}&\Lambda_{[a,b]}(h,h^{-1})=\alpha\iint_{Q_1}(a^2\mid h_x\mid^2+b^2\mid h_y\mid^2)\mathrm{d}x\mathrm{d}y+\beta\iint_{Q_1}\frac{a^2\mid\nabla\mathrm{Im}h\mid^2+b^2\mid\nabla\mathrm{Re}h\mid^2}{J(z,h)}\mathrm{d}x\mathrm{d}y\geqslant\\&\alpha\left\{2(a^2-b^2p^2)P\iint_{Q_1}\mid h_x\mid\mathrm{d}x\mathrm{d}y+2b^2p\iint_{Q_1}J(z,h)\mathrm{d}x\mathrm{d}y-(a^2-b^2p^2)P^2\iint_{Q_1}\mathrm{d}x\mathrm{d}y\right\}+\\&\beta\left\{2(b^2-a^2f^2)F\iint_{Q_1}\mid\nabla\mathrm{Re}h\mid\mathrm{d}x\mathrm{d}y+2a^2f\iint_{Q_1}\mathrm{d}x\mathrm{d}y-(b^2-a^2f^2)F^2\iint_{Q_1}J(z,h)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\right\}\geqslant\\&\alpha\{2(a^2-b^2p^2)PL+2b^2pL-(a^2-b^2p^2)P^2l\}+\beta\{2(b^2-a^2f^2)FL+2a^2fl-(b^2-a^2f^2)F^2L\}.\end{aligned}\tag{15}$$

在(15)式中取 $p=\frac{l}{L}$,$P=\frac{L}{l}$,$f=\frac{l}{L}$ 和 $F=1$,那么(15)式变为

$$\Lambda_{[a,b]}(h,h^{-1})\geqslant\Lambda_{[a,b]}(h^*,h^{*-1}).$$

情形二 在(12)和(13)式中取 $p=\frac{a}{b}$ 和 $f=\frac{b}{a}$,那么对正数 Q 和 E,有

$$\begin{aligned}&\alpha(a^2\mid h_x\mid^2+b^2\mid h_y\mid^2)+\beta\frac{a^2\mid\nabla\mathrm{Im}h\mid^2+b^2\mid\nabla\mathrm{Re}h\mid^2}{J(z,h)}\geqslant\\&\alpha[(b^2-a^2q^2)\mid h_y\mid^2+2a^2q\mid h_x\mid\mid h_y\mid]+\beta\frac{(a^2-b^2e^2)\mid\nabla\mathrm{Im}h\mid^2+2b^2eJ(z,f)}{J(z,h)}=\\&\alpha[(b^2-a^2q^2)\mid h_y\mid^2+(b^2-a^2q^2)Q^2+2a^2qJ(z,h)-(b^2-a^2q^2)Q^2]+\\&\beta\frac{(a^2-b^2e^2)\mid\nabla\mathrm{Im}h\mid^2+(a^2-b^2e^2)E^2J^2(z,h)+2b^2eJ(z,h)-(a^2-b^2e^2)E^2J^2(z,h)}{J(z,h)}\geqslant\\&\alpha[2(b^2-a^2q^2)\mid h_y\mid Q+2a^2qJ(z,h)-(b^2-a^2q^2)Q^2]+\\&\beta\frac{2(a^2-b^2e^2)\mid\nabla\mathrm{Im}h\mid EJ(z,h)+2b^2eJ(z,h)-(a^2-b^2e^2)E^2J^2(z,h)}{J(z,h)}.\end{aligned}\tag{16}$$

对(16)式两边同时积分得

$$\begin{aligned}&\Lambda_{[a,b]}(h,h^{-1})=\alpha\iint_{Q_1}(a^2\mid h_x\mid^2+b^2\mid h_y\mid^2)\mathrm{d}x\mathrm{d}y+\beta\iint_{Q_1}\frac{a^2\mid\nabla\mathrm{Im}h\mid^2+b^2\mid\nabla\mathrm{Re}h\mid^2}{J(z,h)}\mathrm{d}x\mathrm{d}y\geqslant\\&\alpha\left\{2(b^2-a^2q^2)Q\iint_{Q_1}\mid h_y\mid\mathrm{d}x\mathrm{d}y+2a^2q\iint_{Q_1}J(z,h)\mathrm{d}x\mathrm{d}y-(b^2-a^2q^2)Q^2\iint_{Q_1}\mathrm{d}x\mathrm{d}y\right\}+\end{aligned}$$

$$\beta\left\{2(a^2-b^2e^2)E\iint\limits_{Q_1}|\nabla \mathrm{Im}h|\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y+2b^2e\iint\limits_{Q_1}\mathrm{d}x\mathrm{d}y-(a^2-b^2e^2)E^2\iint\limits_{Q_1}J(z,h)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\right\}\geqslant$$
$$\alpha\{2(b^2-a^2q^2)Ql+2a^2qL-(b^2-a^2q^2)Q^2l\}+\beta\{2(a^2-b^2e^2)El+2b^2el-(a^2-b^2e^2)E^2L\}. \tag{17}$$

在(17)式中取 $q=\dfrac{L}{l}$，$Q=1$，$e=\dfrac{L}{l}$和$E=\dfrac{l}{L}$，那么(17)式变为

$$\Lambda_{[a,b]}(h,h^{-1})\geqslant\Lambda_{[a,b]}(h^*,h^{*-1}). \tag{18}$$

由(12)～(14)和(16)中取等号，可知(18)式取等号的充要条件为

$$h(x+\mathrm{i}y)=h^*(x+\mathrm{i}y)=\frac{L}{l}x+\mathrm{i}y.$$

注 4　定理 3 中若 $a=b=1$，该结果刚好为文献[8]中的结果.

参考文献：

[1] GRÖTZSCH H. Über die Verzerrung bei schlichten nichtkonformen Abbildungen und über eine damit zusammenhängende Erweiterung des Picardchen Sates[J]. Ber Verh Sächs Akad Wiss Leipzig，1928，80 (1)：503-507.

[2] ASTALA K，IWAINIEC T，MARTIN G J，et al. Extremal mappings of finite distortion[J]. Proceedings of the London Mathematical Society，2005，91 (3)：655-702.

[3] ASTALA K，IWAINIEC T，MARTIN G J. Deformation of annuli with smallest mean distortion[J]. Archive for Rational Mechanics and Analysis，2010，195 (3)：899-921.

[4] MARTIN G J，MCKUBRE-JORDENS M. Deformation with smallest weighted L^p average distortion and Nitsche-type phenomena[J]. Journal of the London Mathematical Society，2012，85 (2)：282-300.

[5] FENG X G，TANG S A，WU C，et al. A unified approach to the weighted Grötzsch and Nitsch problems for mappings of finite distortion[J]. Science China Mathematics，2016，59 (4)：673-686.

[6] IWAINIEC T，ONNINEN J. Hyperelastic deformations of smallest total energy[J]. Archive for Rational Mechanics and Analysis，2009，194 (3)：927-986.

[7] CHEN S L，KALAJ D. Total energy of radial mappings[J]. Nonlinear Analysis，2017，167 (1)：21-28.

[8] 冯小高. 两矩形上得全偏差[J]. 数学年刊 (A 辑)，2020，41 (2)：163-174.

[9] KALAJ D. Hyperelastic deformations and total combined energy of mappings between annuli[J]. Journal of Differential Equations，2020，268 (10)：6103-6136.

[10] 冯小高，谭俊键. 矩形上组合能量的极值问题[J]. 纯粹数学与应用数学，2020，36 (4)：448-454.

（责任编辑　朱夜明）