doi:10.3969/j.issn.1000-2162.2024.02.003

有限混合费希尔分布极值密度函数的渐近性质

韦　杰,曾　萍
(贵州中医药大学 信息工程学院,贵州 贵阳 550025)

摘　要:设有限混合费希尔分布的分布函数由 $F(x)=\sum_{k=1}^{r}p_kF_k(x)$ 确定,通过对有限混合费希尔分布尾部表达式的精确展开,判断了在线性赋范和幂赋范条件下的极值分布类型分别为 $F\in D_l(\Phi_{v_1/2})$ 和 $F\in D_p(\Phi_1)$.基于有限混合费希尔分布极值分布的渐近展开式,推导出在线性赋范和幂赋范两种不同条件下极值密度函数收敛的高阶渐近展开式,得到有限混合费希尔分布极大值密度收敛到 Fréchet 极值分布密度的结论.

关键词:有限混合;费希尔分布;渐近展开;密度函数;极值
中图分类号:O211.4　　**文献标志码**:A　　**文章编号**:1000-2162(2024)02-0014-10

Asymptotic properties of density function of extremes from mixed fisher distribution

WEI Jie, ZENG Ping
(School of Information Engineering, Guizhou University of Traditional Chinese Medicine, Guiyang 550025, China)

Abstract: In this paper, let $F(x)=\sum_{k=1}^{r}p_kF_k(x)$ denote the distribution function of mixed Fisher distribution. By the exact expansion of its distributional tail representation, we derived the extreme value distribution types $F\in D_l(\Phi_{v_1/2})$ and $F\in D_p(\Phi_1)$ under linear and power normalization. Based on the asymptotic expansion of the extreme value distribution of mixed Fisher distribution, we deduced its the higher-order asymptotic expansion of the convergence of the extreme value density function under two different conditions of linear and power normalization, and obtained the conclusion that the maximum density of mixed Fisher distribution converges to the Fréchet extreme value distribution density.

Keywords: finite mixture; Fisher distribution; asymptotic expansion; density function; extreme value

自然界中的一些极端事件虽然发生的概率很小,但一旦发生将会严重影响人类生活,甚至会改变自然规律,因此致力于探索极端事件发生的规律,是学者们探讨并解决的重要问题.极值理论是一种描述和研究极值事件统计规律的方法,Fisher 等[1]提出了在线性赋范条件下极值分布渐近理论的极值类型定理,Gnedenko[2]对极值类型定理进行了严格证明.极值类型定理奠定了对极端事件的研究基础,极值理论也得到了快速发展.极值分布吸引场判定、极值分布展开和收敛速度问题是极值理论近年来研究的

收稿日期:2022-09-12
基金项目:国家自然科学基金资助项目(81860695);贵州省教育科学规划课题资助项目(2015B195)
作者简介:韦　杰(1979—),男,贵州安龙人,贵州中医药大学副教授, E-mail: spsslab@163.com.

热点问题，学者们进行了一系列深入而系统的研究[3-7]. 在极值分布研究基础上关于密度函数和幂的展开及收敛性问题的研究结果也很丰富. Peng 等[8]建立了幂赋范条件下的极值密度和极值矩的收敛速度. Peng 等[9]对偏 t 分布的极值性质进行研究，建立了规范化最大值的概率密度和分布函数的高阶展开式. Liao 等[10]建立了独立同分布的偏正态随机序列在最优规范化常数下最大值和最小值联合分布及密度函数的高阶渐近展开式. Xiong 等[11]研究了偏正态随机序列极值幂分布函数的极限分布，建立了分布函数的高阶渐近展开，并得到收敛速度. Zou 等[12]研究了广义误差分布在不同规范化常数下极值幂的高阶展开和一致收敛速度.

设 $\{T_n, n\geqslant 1\}$ 为独立且有限混合费希尔分布随机变量序列，令 $M_n=\max\limits_{1\leqslant k\leqslant n}\{T_k\}$ 表示 $\{T_n, n\geqslant 1\}$ 的部分最大值，有限混合费希尔分布函数由 $F(x)=\sum\limits_{k=1}^{r}p_kF_k(x)$ 所确定[13]. 文献[14]通过对有限混合费希尔分布尾部表达式的精确展开，推导了两种条件的极值分布类型，得到线性赋范条件下 $F\in D_l(\Phi_{v_1/2})$，其规范化常数为

$$a_n=2^{\frac{2}{v_1}}n^{\frac{2}{v_1}}(p_1C_{m_1,v_1})^{\frac{2}{v_1}}v_1^{-\frac{2}{v_1}}m_1^{-\frac{m_1+v_1}{v_1}}. \tag{1}$$

幂赋范条件下 $F\in D_p(\Phi_1)$，其规范化常数为

$$\alpha_n=2^{\frac{2}{v_1}}n^{\frac{2}{v_1}}(p_1C_{m_1,v_1})^{\frac{2}{v_1}}v_1^{-\frac{2}{v_1}}m_1^{-\frac{m_1+v_1}{v_1}},\ \beta_n=\frac{2}{v_1}. \tag{2}$$

在线性赋范条件下，定义 M_n 的概率密度函数为 $g_n(x)=na_nF^{n-1}(a_nx)f(a_nx)$，令 $\Delta_n^l(g_n,\Phi'_{v_1/2};x)=g_n(x)-\Phi'_{v_1/2}(x)$. 在幂赋范条件下，定义 M_n 的概率密度函数为

$$h_n(x)=n\alpha_n\beta_nx^{\beta_n-1}F^{n-1}(\alpha_n|x|^{\beta_n}\mathrm{sign}(x))f(\alpha_n|x|^{\beta_n}\mathrm{sign}(x)),$$

令 $\Delta_n^p(h_n,\Phi'_1;x)=h_n(x)-\Phi'_1(x)$. 当 $n\to\infty$ 时，借助文献[15]中命题 2.5 可以得到 $\Delta_n^l(g_n,\Phi'_{v_1/2};x)\to 0$ 和 $\Delta_n^p(h_n,\Phi'_1;x)\to 0$.

论文在有限混合费希尔分布极值分布高阶渐近展开的基础上，从理论上研究了有限混合费希尔分布极值密度函数的渐近性质，推导了有限混合费希尔分布极值密度的渐近分布，建立了在线性赋范和幂赋范两种不同规范化常数条件下，有限混合费希尔分布规范化极值密度函数的高阶渐近展开式. 研究所得到的高阶渐近展开式能够精确地描述有限混合费希尔分布的极值密度收敛过程的详细信息.

1　主要结论

定理 1　对于定义的 $\Delta_n^l(g_n,\Phi'_{v_1/2};x)$，若规范化常数 a_n 满足(1)式，当 $n\to\infty$ 时，有

(I) 当 $0<v_1<2, v_2=2v_1$，令 $\delta_1=\min\left\{1,\frac{1}{2}(v_3-v_1),v_1\right\}-\frac{1}{2}v_1$，有

$$a_n^{\delta_1}\left(a_n^{\frac{v_1}{2}}\Delta_n^l(g_n,\Phi'_{v_1/2};x)-\psi_1(x)\Phi'_{v_1/2}(x)\right)\to\rho_1(x)\Phi'_{v_1/2}(x),$$

其中：$\psi_1(x)=J_3-E_3x^{-v_1}+p_1C_{m_1,v_1}v_1^{-1}m_1^{-\frac{m_1+v_1}{2}}(2x^{-\frac{v_1}{2}}-x^{-v_1})$.

① 当 $0<v_1<1, 2v_1<v_3\leqslant 3v_1$ 或 $1\leqslant v_1<2, 2v_1<v_3\leqslant v_1+2$，有 $\rho_1(x)=J_5-E_5x^{-\frac{v_3}{2}}$；

② 当 $0<v_1\leqslant 1, v_3\geqslant 3v_1$，有 $\rho_1(x)=J_7-E_3J_3x^{-v_1}+p_1C_{m_1,v_1}v_1^{-1}m_1^{-\frac{m_1+v_1}{2}}(2J_6-J_3x^{-v_1}-4E_3x^{-\frac{3v_1}{2}}+E_3x^{-2v_1})+p_1^2C_{m_1,v_1}^2v_1^{-2}m_1^{-(m_1+v_1)}(4x^{-v_1}-\frac{10}{3}x^{-\frac{3v_1}{2}}+\frac{1}{2}x^{-2v_1})+\frac{1}{2}E_3^2x^{-2v_1}$；

③ 当 $1\leqslant v_1<2, v_3\geqslant v_1+2$，有 $\rho_1(x)=J_1-E_1x^{-\frac{v_1}{2}-1}$.

(II) 当 $0<v_1<2, v_2>2v_1$，令 $\delta_2=\min\left\{1,\frac{1}{2}(v_2-v_1),v_1\right\}-\frac{1}{2}v_1$，有

$$a_n^{\delta_2}\left(a_n^{\frac{v_1}{2}}\Delta_n^l(g_n,\Phi'_{v_1/2};x)-\psi_2(x)\Phi'_{v_1/2}(x)\right)\to\rho_2(x)\Phi'_{v_1/2}(x),$$

其中：$\psi_2(x)=p_1C_{m_1,v_1}v_1^{-1}m_1^{-\frac{m_1+v_1}{2}}(2x^{-\frac{v_1}{2}}-x^{-v_1})$.

① 当 $0<v_1<1$,$v_2\geqslant 3v_1$,有 $\rho_2(x)=p_1^2C_{m_1,v_1}^2v_1^{-2}m_1^{-(m_1+v_1)}(4x^{-v_1}-\frac{10}{3}x^{-\frac{3v_1}{2}}+\frac{1}{2}x^{-2v_1})$;

② 当 $0<v_1<1$,$2v_1<v_2\leqslant 3v_1$ 或 $1\leqslant v_1<2$,$2v_1<v_2\leqslant v_1+2$,有 $\rho_2(x)=J_3-E_3x^{-\frac{v_2}{2}}$;

③ 当 $1\leqslant v_1<2$,$v_2\geqslant v_1+2$,有 $\rho_2(x)=J_1-E_1x^{-\frac{v_1}{2}-1}$.

(III) 当 $v_1=2$,$v_2=4$,令 $\delta_3=\min\left\{\frac{1}{2}(v_3-2),2\right\}-1$,有

$$a_n^{\delta_3}(a_n\Delta_n^l(g_n,\Phi'_{v_1/2};x)-\psi_3(x)\Phi'_{v_1/2}(x))\to\rho_3(x)\Phi'_{v_1/2}(x),$$

其中:$\psi_3(x)=J_1+J_3-(E_1+E_3)x^{-2}+p_1C_{m_1,v_1}m_1^{-\frac{m_1+v_1}{2}}(x^{-1}-\frac{1}{2}x^{-2})$.

① 当 $v_1=2$,$v_2=4$,$4<v_3\leqslant 6$,有 $\rho_3(x)=J_5-E_5x^{-\frac{v_3}{2}}$;

② 当 $v_1=2$,$v_2=4$,$v_3\geqslant 6$,有 $\rho_3(x)=J_2+J_4+J_7-(J_1E_1+J_1E_3+J_3E_1+J_3E_3)x^{-2}-(E_2+E_4)x^{-3}+(\frac{1}{2}E_1^2+\frac{1}{2}E_3^2+E_1E_3)x^{-4}+p_1C_{m_1,v_1}m_1^{-\frac{m_1+v_1}{2}}(J_6-\frac{1}{2}J_1x^{-2}-\frac{1}{2}J_3x^{-2}-2E_1x^{-3}-2E_3x^{-3}+\frac{1}{2}E_1x^{-4}+\frac{1}{2}E_3x^{-4})+p_1^2C_{m_1,v_1}^2m_1^{-(m_1+v_1)}(x^{-2}-\frac{5}{6}x^{-3}+\frac{1}{8}x^{-4})$.

(IV) 当 $v_1=2$,$v_2>4$,令 $\delta_4=\min\left\{\frac{1}{2}(v_2-2),2\right\}-1$,有

$$a_n^{\delta_4}(a_n\Delta_n^l(g_n,\Phi'_{v_1/2};x)-\psi_4(x)\Phi'_{v_1/2}(x))\to\rho_4(x)\Phi'_{v_1/2}(x),$$

其中:$\psi_4(x)=J_1-E_1x^{-2}+p_1C_{m_1,v_1}m_1^{-\frac{m_1+v_1}{2}}(x^{-1}-\frac{1}{2}x^{-2})$.

① 当 $v_1=2$,$4<v_2\leqslant 6$,有 $\rho_4(x)=J_3-E_3x^{-\frac{v_2}{2}}$;

② 当 $v_1=2$,$v_2\geqslant 6$,有 $\rho_4(x)=J_2-J_1E_1x^{-2}-E_2x^{-3}+\frac{1}{2}E_1^2x^{-4}-p_1C_{m_1,v_1}m_1^{-\frac{m_1+v_1}{2}}(\frac{1}{2}J_1x^{-2}+2E_1x^{-3}-\frac{1}{2}E_1x^{-4})-p_1^2C_{m_1,v_1}^2m_1^{-(m_1+v_1)}(\frac{5}{6}x^{-3}-x^{-2}-\frac{1}{8}x^{-4})$.

(V) 当 $v_1>2$,$v_2=v_1+2$,令 $\delta_5=\min\left\{2,\frac{1}{2}(v_3-v_1),\frac{1}{2}v_1\right\}-1$,有

$$a_n^{\delta_5}(a_n\Delta_n^l(g_n,\Phi'_{v_1/2};x)-\psi_5(x)\Phi'_{v_1/2}(x))\to\rho_5(x)\Phi'_{v_1/2}(x),$$

其中:$\psi_5(x)=J_1+J_3-(E_1+E_3)x^{-\frac{v_1}{2}-1}$.

① 当 $2<v_1\leqslant 4$,$v_2=v_1+2$,$v_3\geqslant 2v_1$,有 $\rho_5(x)=p_1C_{m_1,v_1}v_1^{-1}m_1^{-\frac{m_1+v_1}{2}}(2x^{-\frac{v_1}{2}}-x^{-v_1})$;

② 当 $v_1\geqslant 4$,$v_2=v_1+2$,$v_3\geqslant v_1+4$,有

$$\rho_5(x)=J_2+J_4+J_7-(J_1E_1+J_1E_3+J_3E_1+J_3E_3)x^{-\frac{v_1}{2}-1}-(E_2+E_4)x^{-\frac{v_1}{2}-2}+(\frac{1}{2}E_1^2+\frac{1}{2}E_3^2+E_1E_3)x^{-v_1-2};$$

③ 当 $2<v_1\leqslant 4$,$v_2=v_1+2$,$v_1+2<v_3\leqslant 2v_1$ 或 $v_1\geqslant 4$,$v_2=v_1+2$,$v_1+2<v_3\leqslant v_1+4$,有

$$\rho_5(x)=J_5-E_5x^{-\frac{v_3}{2}}.$$

(VI) 当 $v_1>2$,$v_2>v_1+2$,令 $\delta_6=\min\left\{2,\frac{1}{2}(v_2-v_1),\frac{1}{2}v_1\right\}-1$,有

$$a_n^{\delta_6}(a_n\Delta_n^l(g_n,\Phi'_{v_1/2};x)-\psi_6(x)\Phi'_{v_1/2}(x))\to\rho_6(x)\Phi'_{v_1/2}(x),$$

其中:$\psi_6(x)=J_1-E_1x^{-\frac{v_1}{2}-1}$.

① 当 $2<v_1\leqslant 4$,$v_2\geqslant 2v_1$,有 $\rho_6(x)=p_1C_{m_1,v_1}v_1^{-1}m_1^{-\frac{m_1+v_1}{2}}(2x^{-\frac{v_1}{2}}-x^{-v_1})$;

② 当 $2<v_1<4$,$v_1+2<v_2\leqslant 2v_1$ 或 $v_1\geqslant 4$,$v_1+2<v_2\leqslant v_1+4$,有 $\rho_6(x)=J_3-E_3x^{-\frac{v_2}{2}}$;

③ 当 $v_1 \geqslant 4, v_2 \geqslant v_1+4$，有 $\rho_6(x)=J_2-J_1E_1x^{-\frac{v_1}{2}-1}-E_2x^{-\frac{v_1}{2}-2}+\frac{1}{2}E_1^2x^{-v_1-2}$.

(VII) 当 $0<v_1<v_2<\min\{v_1+2, 2v_1\}$，令 $\delta_7=\min\left\{1, \frac{1}{2}v_1, (v_2-v_1), \frac{1}{2}(v_3-v_1)\right\}-\frac{1}{2}(v_2-v_1)$，有

$$a_n^{\delta_7}(a_n^{\frac{1}{2}(v_2-v_1)}\Delta_n^l(g_n, \Phi'_{v_1/2};x)-\psi_7(x)\Phi'_{v_1/2}(x))\rightarrow\rho_7(x)\Phi'_{v_1/2}(x),$$

其中：$\psi_7(x)=J_3-E_3x^{-\frac{v_2}{2}}$.

① 当 $0<v_1\leqslant 2, \frac{3}{2}v_1\leqslant v_2<2v_1, v_3\geqslant 2v_1$，有 $\rho_7(x)=p_1C_{m_1,v_1}v_1^{-1}m_1^{-\frac{m_1+v_1}{2}}(2x^{-\frac{v_1}{2}}-x^{-v_1})$；

② 当 $0<v_1<2, v_1<v_2\leqslant\frac{3}{2}v_1, v_3\geqslant 2v_1$ 或 $v_1\geqslant 2, v_1<v_2\leqslant v_1+1, v_3\geqslant v_1+2$，或 $0<v_1<2, v_1<v_2\leqslant\frac{1}{2}(v_1+v_3), v_3<2v_1$ 或 $v_1>2, v_1<v_2\leqslant\frac{1}{2}(v_1+v_3), v_2<v_3\leqslant v_1+2$，有

$$\rho_7(x)=J_7-E_3J_3x^{-\frac{v_2}{2}}+\frac{1}{2}E_3^2x^{-v_2};$$

③ 当 $v_1\geqslant 2, v_1+1\leqslant v_2<v_1+2, v_3\geqslant v_1+2$，有 $\rho_7(x)=J_1-E_1x^{-\frac{v_1}{2}-1}$；

④ 当 $v_1\geqslant 2, \frac{1}{2}(v_1+v_3)\leqslant v_2\leqslant v_1+2, v_2<v_3\leqslant v_1+2$ 或 $0<v_1<2, \frac{1}{2}(v_1+v_3)\leqslant v_2<2v_1, v_2<v_3\leqslant 2v_1$，有 $\rho_7(x)=J_5-E_5x^{-\frac{v_3}{2}}$.

定理 2　对于定义的 $\Delta_n^p(h_n, \Phi'_1;x)$，若规范化常数 α_n 和 β_n 满足(2)式，当 $n\rightarrow\infty$ 时，有

(I) 当 $0<v_1<2, v_2=2v_1$，令 $\delta_1=\min\left\{1, \frac{1}{2}(v_3-v_1), v_1\right\}-\frac{1}{2}v_1$，有

$$a_n^{\delta_1}(a_n^{\frac{v_1}{2}}\Delta_n^p(h_n, \Phi'_1;x)-\tilde{\psi}_1(x)\Phi'_1(x))\rightarrow\tilde{\rho}_1(x)\Phi'_1(x),$$

其中：$\tilde{\psi}_1(x)=J_3-E_3x^{-2}+p_1C_{m_1,v_1}v_1^{-1}m_1^{-\frac{m_1+v_1}{2}}(2x^{-1}-x^{-2})$.

① 当 $0<v_1<1, 2v_1<v_3\leqslant 3v_1$ 或 $1\leqslant v_1<2, 2v_1<v_3\leqslant v_1+2$，有 $\tilde{\rho}_1(x)=J_5-E_5x^{-\frac{v_3}{v_1}}$；

② 当 $0<v_1\leqslant 1, v_3\geqslant 3v_1$，有 $\tilde{\rho}_1(x)=J_7-E_3J_3x^{-2}+p_1C_{m_1,v_1}v_1^{-1}m_1^{-\frac{m_1+v_1}{2}}(2J_6-J_3x^{-2}-4E_3x^{-3}+E_3x^{-4})+p_1^2C_{m_1,v_1}^2v_1^{-2}m_1^{-(m_1+v_1)}(4x^{-2}-\frac{10}{3}x^{-3}+\frac{1}{2}x^{-4})+\frac{1}{2}E_3^2x^{-4}$；

③ 当 $1\leqslant v_1<2, v_3\geqslant v_1+2$，有 $\tilde{\rho}_1(x)=J_1-E_1x^{-\frac{2}{v_1}-1}$.

(II) 当 $0<v_1<2, v_2>2v_1$，令 $\delta_2=\min\left\{1, \frac{1}{2}(v_2-v_1), v_1\right\}-\frac{1}{2}v_1$，有

$$a_n^{\delta_2}(a_n^{\frac{v_1}{2}}\Delta_n^p(h_n, \Phi'_1;x)-\tilde{\psi}_2(x)\Phi'_1(x))\rightarrow\tilde{\rho}_2(x)\Phi'_1(x),$$

其中：$\tilde{\psi}_2(x)=p_1C_{m_1,v_1}v_1^{-1}m_1^{-\frac{m_1+v_1}{2}}(2x^{-1}-x^{-2})$.

① 当 $0<v_1<1, v_2\geqslant 3v_1$，有 $\tilde{\rho}_2(x)=p_1^2C_{m_1,v_1}^2v_1^{-2}m_1^{-(m_1+v_1)}(4x^{-2}-\frac{10}{3}x^{-3}+\frac{1}{2}x^{-4})$；

② 当 $0<v_1<1, 2v_1<v_2\leqslant 3v_1$ 或 $1\leqslant v_1<2, 2v_1<v_2\leqslant v_1+2$，有 $\tilde{\rho}_2(x)=J_3-E_3x^{-\frac{v_2}{v_1}}$；

③ 当 $1\leqslant v_1<2, v_2\geqslant v_1+2$，有 $\tilde{\rho}_2(x)=J_1-E_1x^{-\frac{2}{v_1}-1}$.

(III) 当 $v_1=2, v_2=4$，令 $\delta_3=\min\left\{\frac{1}{2}(v_3-2), 2\right\}-1$，有

$$a_n^{\delta_3}(a_n\Delta_n^p(h_n, \Phi'_1;x)-\tilde{\psi}_3(x)\Phi'_1(x))\rightarrow\tilde{\rho}_3(x)\Phi'_1(x),$$

其中：$\tilde{\psi}_3(x)=J_1+J_3-(E_1+E_3)x^{-2}+p_1C_{m_1,v_1}m_1^{-\frac{m_1+v_1}{2}}(x^{-1}-\frac{1}{2}x^{-2})$.

① 当 $v_1=2, v_2=4, 4<v_3\leqslant 6$,有 $\tilde{\rho}_3(x)=J_5-E_5x^{-\frac{v_3}{2}}$;

② 当 $v_1=2, v_2=4, v_3\geqslant 6$,有 $\tilde{\rho}_3(x)=J_2+J_4+J_7-(J_1E_1+J_1E_3+J_3E_1+J_3E_3)x^{-2}-(E_2+E_4)x^{-3}+(\frac{1}{2}E_1^2+\frac{1}{2}E_3^2+E_1E_3)x^{-4}+p_1C_{m_1,v_1}m_1^{-\frac{m_1+v_1}{2}}(J_6-\frac{1}{2}J_1x^{-2}-\frac{1}{2}J_3x^{-2}-2E_1x^{-3}-2E_3x^{-3}+\frac{1}{2}E_1x^{-4}+\frac{1}{2}E_3x^{-4})+p_1^2C_{m_1,v_1}^2m_1^{-(m_1+v_1)}(x^{-2}-\frac{5}{6}x^{-3}+\frac{1}{8}x^{-4})$.

(IV) $v_1=2, v_2>4, \delta_4=\min\left\{\frac{1}{2}(v_2-2),2\right\}-1$,有

$$a_n^{\delta_4}(a_n\Delta_n^p(h_n,\Phi'_1;x)-\tilde{\psi}_4(x)\Phi'_1(x))\to\tilde{\rho}_4(x)\Phi'_1(x),$$

其中:$\tilde{\psi}_4(x)=J_1-E_1x^{-2}+p_1C_{m_1,v_1}m_1^{-\frac{m_1+v_1}{2}}(x^{-1}-\frac{1}{2}x^{-2})$.

① 当 $v_1=2, 4<v_2\leqslant 6$,有 $\tilde{\rho}_4(x)=J_3-E_3x^{-\frac{v_2}{2}}$;

② 当 $v_1=2, v_2\geqslant 6$,有 $\tilde{\rho}_4(x)=J_2-J_1E_1x^{-2}-E_2x^{-3}+\frac{1}{2}E_1^2x^{-4}-p_1C_{m_1,v_1}m_1^{-\frac{m_1+v_1}{2}}(\frac{1}{2}J_1x^{-2}+2E_1x^{-3}-\frac{1}{2}E_1x^{-4})-p_1^2C_{m_1,v_1}^2m_1^{-(m_1+v_1)}(\frac{5}{6}x^{-3}-x^{-2}-\frac{1}{8}x^{-4})$.

(V) 当 $v_1>2, v_2=v_1+2$,令 $\delta_5=\min\left\{2,\frac{1}{2}(v_3-v_1),\frac{1}{2}v_1\right\}-1$,有

$$a_n^{\delta_5}(a_n\Delta_n^p(h_n,\Phi'_1;x)-\tilde{\psi}_5(x)\Phi'_1(x))\to\tilde{\rho}_5(x)\Phi'_1(x),$$

其中:$\tilde{\psi}_5(x)=J_1+J_3-(E_1+E_3)x^{-\frac{2}{v_1}-1}$.

① 当 $2<v_1\leqslant 4, v_2=v_1+2, v_3\geqslant 2v_1$,有 $\tilde{\rho}_5(x)=p_1C_{m_1,v_1}v_1^{-1}m_1^{-\frac{m_1+v_1}{2}}(2x^{-1}-x^{-2})$;

② 当 $v_1\geqslant 4, v_2=v_1+2, v_3\geqslant v_1+4$,有 $\tilde{\rho}_5(x)=J_2+J_4+J_7-(J_1E_1+J_1E_3+J_3E_1+J_3E_3)x^{-\frac{2}{v_1}-1}-(E_2+E_4)x^{-\frac{4}{v_1}-1}+(\frac{1}{2}E_1^2+\frac{1}{2}E_3^2+E_1E_3)x^{-\frac{4}{v_1}-2}$;

③ 当 $2<v_1\leqslant 4, v_2=v_1+2, v_1+2<v_3\leqslant 2v_1$ 或 $v_1\geqslant 4, v_2=v_1+2, v_1+2<v_3\leqslant v_1+4$,有

$$\tilde{\rho}_5(x)=J_5-E_5x^{-\frac{v_3}{v_1}}.$$

(VI) 当 $v_1>2, v_2>v_1+2$,令 $\delta_6=\min\left\{2,\frac{1}{2}(v_2-v_1),\frac{1}{2}v_1\right\}-1$,有

$$a_n^{\delta_6}(a_n\Delta_n^p(h_n,\Phi'_1;x)-\tilde{\psi}_6(x)\Phi'_1(x))\to\tilde{\rho}_6(x)\Phi'_1(x),$$

其中:$\tilde{\psi}_6(x)=J_1-E_1x^{-\frac{2}{v_1}-1}$.

① 当 $2<v_1\leqslant 4, v_2\geqslant 2v_1$,有 $\tilde{\rho}_6(x)=p_1C_{m_1,v_1}v_1^{-1}m_1^{-\frac{m_1+v_1}{2}}(2x^{-1}-x^{-2})$;

② 当 $2<v_1<4, v_1+2<v_2\leqslant 2v_1$ 或 $v_1\geqslant 4, v_1+2<v_2\leqslant v_1+4$,有 $\tilde{\rho}_6(x)=J_3-E_3x^{-\frac{v_2}{v_1}}$;

③ 当 $v_1\geqslant 4, v_2\geqslant v_1+4$,有 $\tilde{\rho}_6(x)=J_2-J_1E_1x^{-\frac{2}{v_1}-1}-E_2x^{-\frac{4}{v_1}-1}+\frac{1}{2}E_1^2x^{-\frac{4}{v_1}-2}$.

(VII) 当 $0<v_1<v_2<\min\{v_1+2,2v_1\}$,令 $\delta_7=\min\left\{1,\frac{1}{2}v_1,(v_2-v_1),\frac{1}{2}(v_3-v_1)\right\}-\frac{1}{2}(v_2-v_1)$,有

$$a_n^{\delta_7}(a_n^{\frac{1}{2}(v_2-v_1)}\Delta_n^p(h_n,\Phi'_1;x)-\tilde{\psi}_7(x)\Phi'_1(x))\to\tilde{\rho}_7(x)\Phi'_1(x),$$

其中:$\tilde{\psi}_7(x)=J_3-E_3x^{-\frac{v_2}{v_1}}$.

① 当 $0<v_1\leqslant 2, \frac{3}{2}v_1\leqslant v_2<2v_1, v_3\geqslant 2v_1$,有 $\tilde{\rho}_7(x)=p_1C_{m_1,v_1}v_1^{-1}m_1^{-\frac{m_1+v_1}{2}}(2x^{-1}-x^{-2})$;

② 当 $0<v_1<2, v_1<v_2\leqslant\frac{3}{2}v_1, v_3\geqslant 2v_1$ 或 $v_1\geqslant 2, v_1<v_2\leqslant v_1+1, v_3\geqslant v_1+2$ 或 $0<v_1<2, v_1<v_2\leqslant\frac{1}{2}(v_1+v_3), v_3<2v_1$ 或 $v_1>2, v_1<v_2\leqslant\frac{1}{2}(v_1+v_3), v_2<v_3\leqslant v_1+2$,有

$$\tilde{\rho}_7(x)=J_7-E_3J_3x^{-\frac{v_2}{v_1}}+\frac{1}{2}E_3^2x^{-\frac{2v_2}{v_1}};$$

③ 当 $v_1\geqslant 2, v_1+1\leqslant v_2<v_1+2, v_3\geqslant v_1+2$,有 $\tilde{\rho}_7(x)=J_1-E_1x^{-\frac{2}{v_1}-1}$;

④ 当 $v_1\geqslant 2, \frac{1}{2}(v_1+v_3)\leqslant v_2\leqslant v_1+2, v_2<v_3\leqslant v_1+2$ 或 $0<v_1<2, \frac{1}{2}(v_1+v_3)\leqslant v_2<2v_1, v_2<v_3\leqslant 2v_1$,有 $\tilde{\rho}_7(x)=J_5-E_5x^{-\frac{v_3}{v_1}}$.

2　引理及证明

引理 1[10]　设 $F(x)$为有限混合费希尔分布的累积分布函数,则对于充分大的 $x>0$,有

$$1-F(x)=2p_1C_{m_1,v_1}v_1^{-1}m_1^{-\frac{m_1+v_1}{2}}x^{-\frac{v_1}{2}}\{1+E_1x^{-1}+E_2x^{-2}+E_3x^{-\frac{1}{2}(v_2-v_1)}+E_4x^{-\frac{1}{2}(v_2-v_1)-1}+E_5x^{-\frac{1}{2}(v_3-v_1)}+O(x^{-\xi_1})\},$$

其中

$$\xi_1=\min\left\{3,\frac{1}{2}(v_2-v_1)+2,\frac{1}{2}(v_3-v_1)+1,\frac{1}{2}(v_4-v_1)\right\},$$

$$E_1=\frac{v_1(m_1-2)}{m_1(v_1+2)}-\frac{v_1(m_1+v_1-2)}{2m_1},$$

$$E_2=\frac{v_2^2(m_2-2)(m_2-4)}{m_2^2(v_2+2)(v_2+4)}-\frac{v_2^2(m_2-2)(m_2+v_2-2)}{2m_2^2(v_2+2)},$$

$$E_3=\frac{p_2C_{m_2,v_2}v_2^{-1}m_2^{-\frac{m_2+v_2}{2}}}{p_1C_{m_1,v_1}v_1^{-1}m_1^{-\frac{m_1+v_1}{2}}},$$

$$E_4=\frac{p_2C_{m_2,v_2}v_2^{-1}m_2^{-\frac{m_2+v_2}{2}}}{p_1C_{m_1,v_1}v_1^{-1}m_1^{-\frac{m_1+v_1}{2}}}\left(\frac{v_2(m_2-2)}{m_2(v_2+2)}-\frac{v_2(m_2+v_2-2)}{2m_2}\right),$$

$$E_5=\frac{p_3C_{m_3,v_3}v_3^{-1}m_3^{-\frac{m_3+v_3}{2}}}{p_1C_{m_1,v_1}v_1^{-1}m_1^{-\frac{m_1+v_1}{2}}}.$$

引理 2　设 $f(x)$为有限混合费希尔分布的概率密度函数,当规范化常数 a_n 满足(1)式时,则对于充分大的 $x>0$,有

$$f(a_nx)=p_1C_{m_1,v_1}m_1^{-\frac{m_1+v_1}{2}}(a_nx)^{-\frac{v_1}{2}-1}\{1+B_1(a_nx)^{-1}+B_2(a_nx)^{-2}+\frac{v_2}{v_1}E_3(a_nx)^{-\frac{v_2-v_1}{2}}+B_3(a_nx)^{-\frac{v_2-v_1}{2}-1}+\frac{v_3}{v_1}E_5(a_nx)^{-\frac{v_3-v_1}{2}}+O(a_n^{-\xi_1})\},$$

其中:$\xi_1=\min\left\{3,\frac{1}{2}(v_2-v_1)+2,\frac{1}{2}(v_3-v_1)+1,\frac{1}{2}(v_4-v_1)\right\}$,且

$$B_1=-\frac{v_1(m_1+v_1)}{2m_1},$$

$$B_2=\frac{v_1^2(m_1+v_1)(m_1+v_1+2)}{8m_1^2},$$

$$B_3=-\frac{v_2(m_2+v_2)}{2m_2}\frac{p_2C_{m_2,v_2}m_2^{-\frac{m_2+v_2}{2}}}{p_1C_{m_1,v_1}m_1^{-\frac{m_1+v_1}{2}}}.$$

证明

$$f(a_nx)=\sum_{i=1}^{r}p_iC_{m_i,v_i}(a_nx)^{\frac{m_i}{2}-1}(m_ia_nx)^{-\frac{m_i+v_i}{2}}(1+\frac{v_i}{m_ia_nx})^{-\frac{m_i+v_i}{2}}=$$

$$p_1C_{m_1,v_1}m_1^{-\frac{m_1+v_1}{2}}(a_nx)^{-\frac{v_1}{2}-1}\{1-\frac{v_1(m_1+v_1)}{2m_1}(a_nx)^{-1}+\frac{v_1^2(m_1+v_1)(m_1+v_1+2)}{8m_1^2}(a_nx)^{-2}+$$

$$\sum_{i=2}^{r}\frac{p_iC_{m_i,v_i}m_i^{-\frac{m_i+v_i}{2}}(a_nx)^{-\frac{v_i}{2}-1}}{p_1C_{m_1,v_1}m_1^{-\frac{m_1+v_1}{2}}(a_nx)^{-\frac{v_1}{2}-1}}[1-\frac{v_i(m_i+v_i)}{2m_i}(a_nx)^{-1}+$$

$$\frac{v_i^2(m_i+v_i)(m_i+v_i+2)}{8m_i^2}(a_nx)^{-2}+O(a_n^{-3})]+O(a_n^{-3})\}=$$

$$p_1C_{m_1,v_1}m_1^{-\frac{m_1+v_1}{2}}(a_nx)^{-\frac{v_1}{2}-1}\{1+B_1(a_nx)^{-1}+B_2(a_nx)^{-2}+\frac{v_2}{v_1}E_3(a_nx)^{-\frac{v_2-v_1}{2}}+$$

$$B_3(a_nx)^{-\frac{v_2-v_1}{2}-1}+\frac{v_3}{v_1}E_5(a_nx)^{-\frac{v_3-v_1}{2}}+O(a_n^{-\xi_1})\},$$

其中:n 足够大,ξ_1 和 B_1,B_2,B_3 由引理2给出,引理得证.

引理3 设 $F(x)$ 和 $f(x)$ 分别为有限混合费希尔分布的累积分布函数和概率密度函数,当规范化常数 a_n 满足(1)式时,则对于充分大的 $x>0$,有

$$\frac{a_nf(a_nx)}{1-F(a_nx)}=\frac{v_1}{2}x^{-1}\{1+(B_1-E_1)(a_nx)^{-1}+(B_2+E_1^2-E_2-E_1B_1)(a_nx)^{-2}+$$

$$E_3(\frac{v_2}{v_1}-1)(a_nx)^{-\frac{v_2-v_1}{2}}+(B_3-\frac{v_2}{v_1}E_1E_3-B_1E_3+2E_1E_3-E_4)(a_nx)^{-\frac{v_2-v_1}{2}-1}+$$

$$E_5(\frac{v_3}{v_1}-1)(a_nx)^{-\frac{v_3-v_1}{2}}+O(a_n^{-\xi_2})\},$$

其中

$$\xi_2=\min\Big\{3,\frac{1}{2}(v_2-v_1)+2,\frac{1}{2}(v_3-v_1)+1,\frac{1}{2}(v_4-v_1),$$

$$\frac{1}{2}(v_2+v_3)-v_1,v_2-v_1,v_3-v_1,v_4-v_1\Big\}.$$

证明 由引理1,2可得证.

引理4 对于有限混合费希尔分布,当规范化常数 a_n 满足(1)式时,令 $E(n,x)=$

$$\frac{1+E_1(a_nx)^{-1}+E_2(a_nx)^{-2}+E_3(a_nx)^{-\frac{1}{2}(v_2-v_1)}+E_4(a_nx)^{-\frac{1}{2}(v_2-v_1)-1}+E_5(a_nx)^{-\frac{1}{2}(v_3-v_1)}+O(a_n^{-\xi_1})}{1+E_1a_n^{-1}+E_2a_n^{-2}+E_3a_n^{-\frac{1}{2}(v_2-v_1)}+E_4a_n^{-\frac{1}{2}(v_2-v_1)-1}+E_5a_n^{-\frac{1}{2}(v_3-v_1)}+O(a_n^{-\xi_1})},$$

则对于充分大的 $x>0$,有

$$E(n,x)=1+D_1a_n^{-1}+D_2a_n^{-2}+D_3a_n^{-\frac{1}{2}(v_2-v_1)}+D_4a_n^{-\frac{1}{2}(v_2-v_1)-1}+D_5a_n^{-\frac{1}{2}(v_3-v_1)}+O(a_n^{-\xi_3}),$$

$$E(n,x)(1-F(a_nx))=2p_1C_{m_1,v_1}v_1^{-1}m_1^{-\frac{m_1+v_1}{2}}x^{-\frac{v_1}{2}}a_n^{-\frac{v_1}{2}}+$$

$$2p_1C_{m_1,v_1}v_1^{-1}m_1^{-\frac{m_1+v_1}{2}}(D_3x^{-\frac{v_1}{2}}+E_3x^{-\frac{v_2}{2}})a_n^{-\frac{v_2}{2}}+$$

$$2p_1C_{m_1,v_1}v_1^{-1}m_1^{-\frac{m_1+v_1}{2}}(D_5x^{-\frac{v_1}{2}}+E_5x^{-\frac{v_3}{2}})a_n^{-\frac{v_3}{2}}+O(x^{-\xi_4}),$$

$$E(n,x)(1-F(a_nx))^2=4p_1^2C_{m_1,v_1}^2v_1^{-2}m_1^{-(m_1+v_1)}x^{-v_1}a_n^{-v_1}+$$

$$4p_1^2C_{m_1,v_1}^2v_1^{-2}m_1^{-(m_1+v_1)}(D_1+2E_1x^{-1})x^{-v_1}a_n^{-v_1-1}+O(a_n^{-\xi_5}),$$

其中

$$\xi_3=\min\Big\{3,\frac{1}{2}(v_2-v_1)+2,\frac{1}{2}(v_3-v_1)+1,\frac{1}{2}(v_4-v_1),$$

$$\frac{1}{2}(v_2+v_3)-v_1,v_2-v_1,v_3-v_1,v_4-v_1\Big\},$$

$$\xi_4=\min\Big\{\frac{1}{2}v_1+1,\frac{1}{2}v_2+1,\frac{1}{2}v_3+1,v_2-\frac{1}{2}v_1,v_3-\frac{1}{2}v_1,\frac{1}{2}(v_2+v_3)-\frac{1}{2}v_1\Big\},$$

$$\xi_5=\min\Big\{v_1+2,\frac{1}{2}(v_2+v_1),\frac{1}{2}(v_3+v_1),\frac{1}{2}(v_3+v_2),v_2,v_3\Big\},$$

$$D_1=E_1(x^{-1}-1),$$

$$D_2=E_2x^{-2}-E_1^2x^{-1}+E_1^2-E_2,$$

$$D_3=E_3(x^{-\frac{1}{2}(v_2-v_1)}-1),$$

$$D_4=E_4x^{-\frac{1}{2}(v_2-v_1)-1}-E_1E_3x^{-\frac{1}{2}(v_2-v_1)}-E_1E_3x^{-1}+2E_1E_3-E_4,$$

$$D_5=E_5(x^{-\frac{1}{2}(v_3-v_1)}-1).$$

证明　由引理 1 可得证.

3　定理的证明

定理 1 的证明. 根据引理 1～4，可以得到

$$\frac{a_nf(a_nx)}{1-F(a_nx)}\frac{1-F(a_nx)}{1-F(a_n)}F^{-1}(a_nx)=$$

$$\frac{a_nf(a_nx)}{1-F(a_nx)}x^{-\frac{v_1}{2}}E(n,x)\{1+(1-F(a_nx))+(1-F(a_nx))^2(1+o(1))\}=$$

$$\frac{v_1}{2}x^{-\frac{v_1}{2}-1}\{1+[(B_1-E_1)x^{-1}+D_1]a_n^{-1}+$$

$$[(B_2+E_1^2-E_2-E_1B_1)x^{-2}+(B_1-E_1)D_1x^{-1}+D_2]a_n^{-2}+[E_3(\frac{v_2}{v_1}-1)x^{-\frac{v_2-v_1}{2}}+D_3]a_n^{-\frac{v_2-v_1}{2}}+$$

$$[(B_3-\frac{v_2}{v_1}E_1E_3-E_3B_1+2E_1E_3-E_4)x^{-\frac{v_2-v_1}{2}-1}+D_1E_3(\frac{v_2}{v_1}-1)x^{-\frac{v_2-v_1}{2}}+$$

$$D_3(B_1-E_1)x^{-1}+D_4]a_n^{-\frac{v_2-v_1}{2}-1}+[E_5(\frac{v_3}{v_1}-1)x^{-\frac{v_3-v_1}{2}}+D_5]a_n^{-\frac{v_3-v_1}{2}}+2p_1C_{m_1,v_1}v_1^{-1}m_1^{-\frac{m_1+v_1}{2}}x^{-\frac{v_1}{2}}a_n^{-\frac{v_1}{2}}+$$

$$2p_1C_{m_1,v_1}v_1^{-1}m_1^{-\frac{m_1+v_1}{2}}[E_3(\frac{v_2}{v_1}-1)x^{-\frac{v_2}{2}}+D_3x^{-\frac{v_1}{2}}+E_3x^{-\frac{v_2}{2}}]a_n^{-\frac{v_2}{2}}+4p_1^2C_{m_1,v_1}^2v_1^{-2}m_1^{-(m_1+v_1)}x^{-v_1}a_n^{-v_1}+$$

$$D_3E_3(\frac{v_2}{v_1}-1)x^{-\frac{v_2+v_1}{2}}a_n^{-(v_2-v_1)}+O(a_n^{-\xi_6})\},$$

其中：$\xi_6=\min\{3,\frac{1}{2}(v_2-v_1)+2,\frac{1}{2}(v_3-v_1)+1,v_2-v_1+1,\frac{1}{2}(v_3+v_2)+v_1,v_3-v_1,\frac{1}{2}v_1+1,$
$\frac{1}{2}v_2+1,\frac{1}{2}v_3,v_2-\frac{1}{2}v_1,\frac{1}{2}(v_2+v_3-v_1),v_3-\frac{1}{2}v_1,\frac{1}{2}(v_2+v_1),\frac{1}{2}(v_3+v_1),\frac{1}{2}(v_3+v_2),v_1+1\}$.

下面仅讨论情况(Ⅵ)，其他情况类似可证. 由引理 3 可知，当 $n\to\infty$ 时，有

$$\Delta_n^l(g_n,\Phi'_{v_1/2};x)=\frac{a_nf(a_nx)}{1-F(a_nx)}\frac{1-F(a_nx)}{1-F(a_n)}F^{-1}(a_nx)F^n(a_nx)-\Phi'_{v_1/2}(x)=$$

$$\Phi'_{v_1/2}(x)\{J_1a_n^{-1}+J_2a_n^{-2}+J_3a_n^{-\frac{v_2-v_1}{2}}+J_4a_n^{-\frac{v_2-v_1}{2}-1}+J_5a_n^{-\frac{v_3-v_1}{2}}+2p_1C_{m_1,v_1}v_1^{-1}m_1^{-\frac{m_1+v_1}{2}}x^{-\frac{v_1}{2}}a_n^{-\frac{v_1}{2}}+$$

$$2p_1C_{m_1,v_1}v_1^{-1}m_1^{-\frac{m_1+v_1}{2}}J_6a_n^{-\frac{v_2}{2}}+4p_1^2C_{m_1,v_1}^2v_1^{-2}m_1^{-(m_1+v_1)}x^{-v_1}a_n^{-v_1}+J_7a_n^{-(v_2-v_1)}-E_1x^{-\frac{v_1}{2}-1}a_n^{-1}-$$

$$J_1E_1x^{-\frac{v_1}{2}-1}a_n^{-2}+\omega_6(x)a_n^{-\min\left\{2,\frac{1}{2}(v_2-v_1),\frac{v_1}{2}\right\}}(1+o(1))\},$$

其中

$$J_1=(B_1-E_1)x^{-1}+D_1,$$

$$J_2=(B_2+E_1^2-E_2-E_1B_1)x^{-2}+(B_1-E_1)D_1x^{-1}+D_2,$$

$$J_3=E_3\left(\frac{v_2}{v_1}-1\right)x^{-\frac{v_2-v_1}{2}}+D_3,$$

$$J_4=\left(B_3-\frac{v_2}{v_1}E_1E_3-E_3B_1+2E_1E_3-E_4\right)x^{-\frac{v_2-v_1}{2}-1}+$$

$$D_1E_3\left(\frac{v_2}{v_1}-1\right)x^{-\frac{v_2-v_1}{2}}+D_3(B_1-E_1)x^{-1}+D_4,$$

$$J_5=E_5\left(\frac{v_3}{v_1}-1\right)x^{-\frac{v_3-v_1}{2}}+D_5,$$

$$J_6=E_3\left(\frac{v_2}{v_1}-1\right)x^{-\frac{v_2}{2}}+D_3x^{-\frac{v_1}{2}}+E_3x^{-\frac{v_2}{2}},$$

$$J_7=D_3E_3\left(\frac{v_2}{v_1}-1\right)x^{-\frac{v_2+v_1}{2}}.$$

以下分为 3 种情况给出 $\Delta_n^l(g_n,\Phi'_{v_1/2};x)$：

① 当 $2<v_1\leqslant 4,v_2\geqslant 2v_1$，$\Delta_n^l(g_n,\Phi'_{v_1/2};x)=\Phi'_{v_1/2}(x)\{(J_1-E_1x^{-\frac{v_1}{2}-1})a_n^{-1}+p_1C_{m_1,v_1}v_1^{-1}m_1^{-\frac{m_1+v_1}{2}}(2x^{-\frac{v_1}{2}}-x^{-v_1})a_n^{-\min\left\{2,\frac{1}{2}(v_2-v_1),\frac{v_1}{2}\right\}}(1+o(1))\}$.

② 当 $2<v_1<4,v_1+2<v_2\leqslant 2v_1$ 或 $v_1\geqslant 4,v_1+2<v_2\leqslant v_1+4$，有

$\Delta_n^l(g_n,\Phi'_{v_1/2};x)=\Phi'_{v_1/2}(x)\{(J_1-E_1x^{-\frac{v_1}{2}-1})a_n^{-1}+(J_3-E_3x^{-\frac{v_2}{2}})a_n^{-\min\left\{2,\frac{1}{2}(v_2-v_1),\frac{v_1}{2}\right\}}(1+o(1))\}$.

③ 当 $v_1\geqslant 4,v_2\geqslant v_1+4$，有

$$\Delta_n^l(g_n,\Phi'_{v_1/2};x)=\Phi'_{v_1/2}(x)\{(J_1-E_1x^{-\frac{v_1}{2}-1})a_n^{-1}+$$

$$(J_2-J_1E_1x^{-\frac{v_1}{2}-1}-E_2x^{-\frac{v_1}{2}-2}+\frac{1}{2}E_1^2x^{-v_1-2})a_n^{-\min\left\{2,\frac{1}{2}(v_2-v_1),\frac{v_1}{2}\right\}}(1+o(1))\}.$$

因此，可以得到，当 $n\to\infty$ 时，有

$$a_n^{\delta_6}(a_n\Delta_n^l(g_n,\Phi'_{v_1/2};x)-\psi_6(x)\Phi'_{v_1/2}(x))\to\rho_6(x)\Phi'_{v_1/2}(x),$$

其中：$\psi_6(x)$ 和 $\rho_6(x)$ 由定理 1 中的情况(VI)给出，定理 1 证明完毕.

定理 2 的证明. 设 $x>0$，在幂赋范条件下规范常数满足 $\alpha_n=a_n,\beta_n=\frac{2}{v_1}$ 时，可以得到

$$\Delta_n^p(h_n,\Phi'_1;x)=h_n(x)-\Phi'_1(x)=$$

$$n\alpha_n\beta_nx^{\beta_n-1}F^{n-1}(\alpha_n|x|^{\beta_n}\operatorname{sign}(x))f(\alpha_n|x|^{\beta_n}\operatorname{sign}(x))-x^{-2}\Phi_1(x)=$$

$$\frac{2n}{v_1}a_nx^{\frac{2}{v_1}-1}F^{n-1}(a_nx^{\frac{2}{v_1}})f(a_nx^{\frac{2}{v_1}})-x^{-2}\Phi_1(x)=$$

$$\frac{2}{v_1}x^{\frac{2}{v_1}-1}\{na_nF^{n-1}(a_nx^{\frac{2}{v_1}})f(a_nx^{\frac{2}{v_1}})-\frac{v_1}{2}x^{-\frac{2}{v_1}-1}\Phi_{v_1/2}(x^{\frac{2}{v_1}})\}=$$

$$\frac{2}{v_1}x^{\frac{2}{v_1}-1}\Delta_n^l(g_n,\Phi'_{v_1/2};x^{\frac{2}{v_1}}).$$

在定理 1 中用 $x^{\frac{2}{v_1}}$ 去替换 x，即可得到定理 2 的结论. 定理 2 证明完毕.

* * * * * *

致谢：衷心感谢西南大学彭作祥教授在极值理论研究上给予的悉心指导.

参考文献：

[1] FISHER R A, TIPPETT L H C. Limiting forms of the frequency distribution of the largest or smallest member of a sample[J]. Proceedings of the Cambridge Philosophical Society, 1928, 24 (2): 180-190.

[2] GNEDENKO B V. Sur la distribution limite du terme maximum d'une série aléatoire[J]. Annals of Mathematics, 1943, 44 (3): 423-453.

[3] LU Y Y, PENG Z X. Maxima and minima of independent and nonidentically distributed bivariate Gaussian

triangular arrays[J]. Extremes，2017，20 (1)：187-198.
[4] HU S，PENG Z X，NADARAJAH S. Tail dependence functions of the bivariate Hüsler-Reiss model[J]. Statistics and Probability Letters，2022，180 (3)：1-11.
[5] LIAO X，PENG Z X，NADARAJAH S，et al. Rates of convergence of extremes from skew-normal samples [J]. Statistics and Probability Letters，2014，84 (1)：40-47.
[6] PENG Z X，NADARAJAH S. Convergence rate for the moments of extremes[J]. Bulletin of the Korean Mathematical Society，2012，49 (3)：495-510.
[7] 韦杰，曾萍. 费希尔分布最大值分布的渐近展开[J]. 重庆理工大学学报（自然科学版），2019，33 (8)：237-242.
[8] PENG Z X，SHUAI Y L，NADARAJAH S. On convergence of extremes under power normalization[J]. Extremes，2013，16 (3)：285-301.
[9] PENG Z X，LI C Q，NADARAJAH S. Extremal properties of the skew-T distribution[J]. Statistics and Probability Letters，2016，112 (1)：10-19.
[10] LIAO X，XIONG Q，WENG Z C. Joint distributional expansions of maxima and minima from skew-normal samples[J]. Communications in Statistics-Theory and Methods，2020，49 (24)：5930-5947.
[11] XIONG Q，PENG Z X. Asymptotic expansions of powered skew-normal extremes[J]. Statistics and Probability Letters，2020，158 (2)：1-13.
[12] ZOU Y H，LU Y Y，PENG Z X. Rates of convergence of powered order statistics from general error distribution[J]. Statistical Theory and Related Fields，2023，7 (1)：1-29.
[13] 韦杰，曾萍. 有限混合费希尔分布极值分布的收敛速度[J]. 西北师范大学学报（自然科学版），2018，54 (6)：5-8.
[14] 韦杰，曾萍. 两种赋范条件下有限混合费希尔分布极值分布的高阶渐近展开[J]. 南昌大学学报（理科版），2020，44 (2)：113-120.
[15] RESNICK S I. Extreme value，regular variation，and point processes[M]. Berlin：Springer，1987：85-86.

（责任编辑　朱夜明）