

# 四维水资源供需混沌系统的自适应滑模同步

王东晓, 毛北行

(郑州航空工业管理学院 数学学院, 河南 郑州 450015)

**摘要:**研究了水资源供需混沌系统的自适应滑模同步, 根据李雅普诺夫稳定性理论和同步控制相关理论给出了同步控制的研究结论, 并用 Matlab 仿真技术画出了吸引子相图和系统的误差曲线, 并用仿真算例给出了系统参数的选取以及初始值的设置, 对所得结果进行了数值验证.

**关键词:**供需系统; 滑模; 同步; 混沌

**中图分类号:**TV213.4

**文献标志码:**A

**文章编号:**1000-2162(2024)02-0024-05

## Self-adaptive sliding mode synchronization control of four-dimensional water resources supply and demand chaotic system

WANG Dongxiao, MAO Beixing

(School of Mathematics, Zhengzhou University of Aeronautics, Zhengzhou 450015, China)

**Abstract:** Self-adaptive sliding mode synchronization of four-dimensional water resources supply and demand chaotic system had been studied. According to Lyapunov stability theory and synchronization control theory, the research conclusion of synchronization control was given. The attraction phase diagram and error curve of the system were drawn by Matlab simulation technology. The selection of system parameters and the setting of initial values had been given by simulation examples.

**Keywords:** supply and demand system; sliding mode; synchronization; chaotic

目前我国缺水的城市高达 400 多个, 而严重缺水的也有 130 多个, 随着水资源的环境污染及不合理利用和开发, 水资源的供需矛盾成为我国经济发展的障碍. 近年来, 众多学者对水资源的供需矛盾进行了详细周密的研究<sup>[1-3]</sup>, 取得了十分丰富的理论性成果<sup>[4-7]</sup>. 文献[8]研究了水资源供需系统的平衡点、稳定性和耗散性以及动力学特性. 文献[9]研究水资源供需系统的超混沌控制. 当水资源出现供需混沌时, 供给量与需求量之间的平衡被打破, 出现供需不均衡的矛盾, 这种矛盾使水资源供需系统瘫痪. 因而就需要研究供需混沌的同步控制, 即通过外部控制输入使混沌系统达到同步. 作者研究了水资源供需混沌系统的同步控制, 根据李雅普诺夫稳定性理论和同步控制相关理论给出了同步控制的研究结论.

**收稿日期:**2023-01-13

**基金项目:**国家自然科学基金青年基金资助项目(11801528;41906003)

**作者简介:**王东晓(1974—), 男, 河北威县人, 郑州航空工业管理学院副教授, E-mail: wdx@zua.edu.cn.

## 1 数学模型与主要结果

4 维水资源供需混沌系统方程为<sup>[8-10]</sup>

$$\begin{cases} \dot{X}_1 = a_1 X_1 (1 - \frac{X_1}{M}) - a_2 (X_2 - K) - a_3 X_3(t) - a_4 X_4(t), \\ \dot{X}_2 = -b_1 (X_2 - K) - b_2 X_3 + b_3 X_1 (N - (X_1 - X_3 - X_4)), \\ \dot{X}_3 = c_1 X_3 (X_1 - c_2), \\ \dot{X}_4 = d_1 X_1 - d_2 X_4, \end{cases} \quad (1)$$

其中:  $X_1(t)$  为缺水量,  $X_2(t)$  为外部供水量,  $X_3(t)$  为再生水量,  $X_4(t)$  为自给水量,  $a_1$  为水资源消耗弹性系数,  $a_2$  为外部引水对水需求的影响系数,  $a_3$  为再生水对水需求的影响系数,  $a_4$  为自给水对水需求的影响系数,  $M$  为水资源的最大缺口量,  $N$  为需求缺口量阈值,  $K$  为原有水量,  $b_1$  为供给量对供水速度的影响系数,  $b_2$  为再生水对供水速度的影响系数,  $b_3$  为水需求对供水速度的影响系数, 常数  $c_1$  为再生水的速度,  $c_2$  为再生水的成本,  $d_1$  为水资源需求量对自给水变化率的影响系数,  $d_2$  为自给水量对自给水变化率的影响系数.

令  $x_1 = X_1, x_2 = X_2 - K, x_3 = X_3, x_4 = X_4$  则方程(1)变为

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = a_1 x_1 (1 - \frac{x_1}{M}) - a_2 x_2 - a_3 x_3(t) - a_4 x_4(t), \\ \dot{x}_2 = -b_1 x_2 - b_2 x_3 + b_3 x_1 (N - (x_1 - x_3 - x_4)), \\ \dot{x}_3 = c_1 x_3 (x_1 - c_2), \\ \dot{x}_4 = d_1 x_1 - d_2 x_4. \end{cases} \quad (2)$$

当系统参数  $a_1=0.07, a_2=0.15, a_3=0.15, a_4=0.06, b_1=0.06, b_2=0.14, b_3=0.07, c_1=0.4, c_2=0.4, d_1=0.12, d_2=0.015, M=2, N=1$  时, 系统(1)呈现出混沌态, 其系统的吸引子相图如图1所示. 初始值设置为  $(x_1(0), x_2(0), x_3(0), x_4(0)) = (0.02, 0.01, 0.04, 0.03)$ .

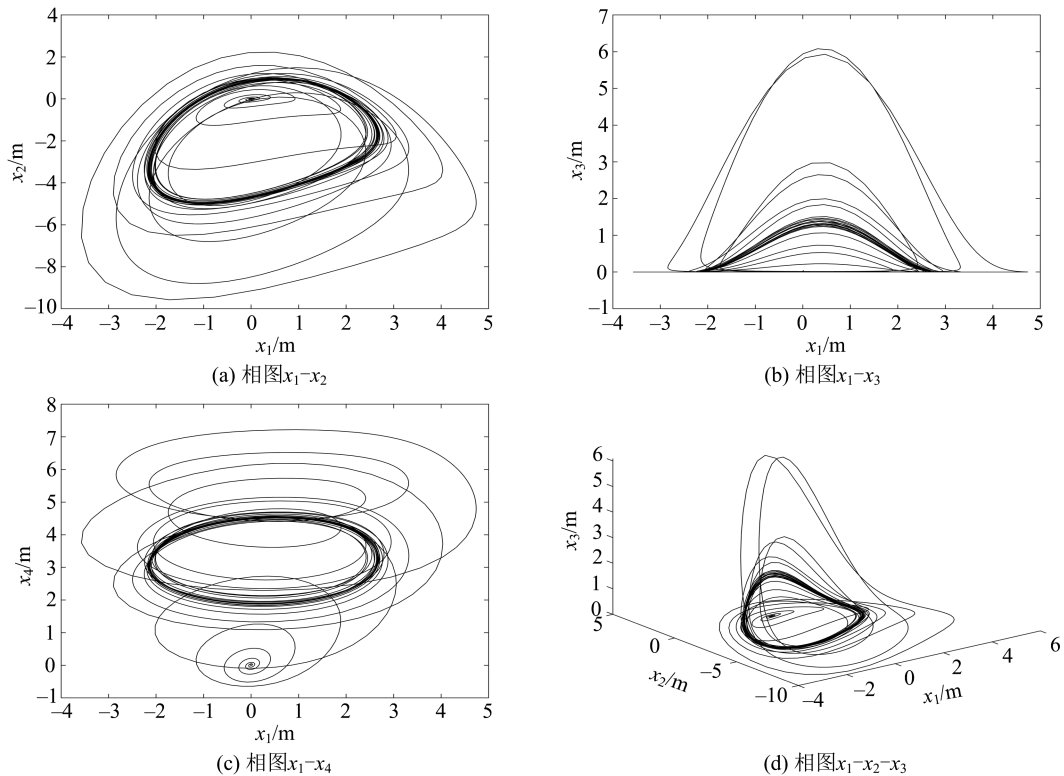


图1 系统(1)的吸引子相图

以(2)作为主系统,设计从系统如下

$$\begin{cases} \dot{y}_1 = a_1 y_1 (1 - \frac{y_1}{M}) - a_2 y_2 - a_3 y_3(t) - a_4 y_4(t) + u(t), \\ \dot{y}_2 = -b_1 y_2 - b_2 y_3 + b_3 y_1 (N - (y_1 - y_3 - y_4)), \\ \dot{y}_3 = c_1 y_3 (y_1 - c_2), \\ \dot{y}_4 = d_1 y_1 - d_2 y_4. \end{cases} \quad (3)$$

定义误差变量  $e_i = y_i - x_i, i=1,2,3,4$ , (3)与(2)两式相减得误差方程

$$\begin{cases} \dot{e}_1 = a_1 e_1 - \frac{a_1(y_1^2 - x_1^2)}{M} - a_2 e_2 - a_3 e_3(t) - a_4 e_4(t) + u(t), \\ \dot{e}_2 = -b_1 e_2 - b_2 e_3 + N b_3 e_1 - b_3(y_1^2 - x_1^2) + b_3(y_1 y_3 - x_1 x_3) + b_3(y_1 y_4 - x_1 x_4), \\ \dot{e}_3 = -c_1 c_2 e_3 + c_1(y_1 y_3 - x_1 x_3), \\ \dot{e}_4 = d_1 e_1 - d_2 e_4. \end{cases} \quad (4)$$

假设  $y_1 < c_2$ .

**定理 1** 在假设条件下,设计滑模函数  $s(t) = \dot{e}_4 + k e_4$ , 其中  $k > 0, \eta > 0$  为常数, 有

$$u(t) = -(a_1 e_1 - \frac{a_1(y_1^2 - x_1^2)}{M} - a_2 e_2 - a_3 e_3 - a_4 e_4) - d_1^{-1}(k - d_2)(d_1 e_1 - d_2 e_4) - \eta \operatorname{sgn}(s), \quad (5)$$

则主从系统(2)与(3)是滑模混沌同步的.

**证明** 位于滑模面时一定有  $s=0, \dot{e}_4 = -k e_4$ , 所以  $e_4 \rightarrow 0$ . 根据方程(4)第 4 个方程,  $\dot{e}_4 = d_1 e_1 - d_2 e_4$ , 由于  $e_4 \rightarrow 0 \Rightarrow \dot{e}_4 \rightarrow 0$ , 从而  $e_1 \rightarrow 0$ . 再根据(4)第 3 个方程, 有

$$\begin{aligned} \dot{e}_3 &= -c_1 c_2 e_3 + c_1(y_1 y_3 - x_1 x_3) = -c_1 c_2 e_3 + c_1[(y_1 y_3 - y_1 x_3) + (y_1 x_3 - x_1 x_3)] = \\ &= -c_1 c_2 e_3 + c_1[y_1 e_3 + e_1 x_3] = c_1 e_3 (y_1 - c_2) + c_1 x_3 e_1. \end{aligned}$$

由于混沌系统轨迹有界, 所以  $c_1 x_3 e_1 \rightarrow 0$ , 上述方程变为  $\dot{e}_3 = c_1 e_3 (y_1 - c_2)$ . 根据假设, 不难得到  $e_3 \rightarrow 0$ , 根据(4)第 2 个方程, 有

$$\dot{e}_2 = -b_1 e_2 - b_2 e_3 + N b_3 e_1 - b_3(y_1^2 - x_1^2) + b_3(y_1 y_3 - x_1 x_3) + b_3(y_1 y_4 - x_1 x_4).$$

由于  $e_1, e_3, e_4 \rightarrow 0$ , 所以上述方程变为  $\dot{e}_2 = -b_1 e_2$ , 从而  $e_2 \rightarrow 0$ .

不在滑模面上时, 构造李雅普诺夫函数  $V(t) = \frac{1}{2} s(t)^2$ , 沿系统(4)求导得到

$$\begin{aligned} \dot{V}(t) &= s(t) \{ d_1 [a_1 e_1 - \frac{a_1(y_1^2 - x_1^2)}{M} - a_2 e_2 - a_3 e_3(t) - a_4 e_4(t) + \\ &u(t)] + (k - d_2)(d_1 e_1 - d_2 e_4) \} = -d_1 \eta |s(t)| < 0. \end{aligned}$$

两边积分, 有

$$0 < \int_0^t [d_1 \eta |s(\tau)|] d\tau < - \int_0^t \dot{V} d\tau < V(0) - V(t) < V(0) - V(\infty) < V(0).$$

根据 Barbatlet's 引理不难得到  $s \rightarrow 0$ , 则主从系统(2)与(3)滑模混沌同步.

**定理 2** 在假设条件下, 设计滑模函数  $s(t) = e_1$ , 其中  $\eta > 0$  为常数, 设计控制器

$$u(t) = -(a_1 e_1 - \frac{a_1(y_1^2 - x_1^2)}{M} - a_2 e_2 - a_3 e_3 - a_4 e_4) - \eta \operatorname{sgn}(s), \quad (6)$$

则主从系统(2)与(3)滑模混沌同步.

**证明** 位于滑模面时一定有  $s=0, e_1 \rightarrow 0$ . 根据(4)第 4 个方程, 有  $\dot{e}_4 = d_1 e_1 - d_2 e_4$ . 由于  $e_1 \rightarrow 0 \Rightarrow \dot{e}_4 = -d_2 e_4 \Rightarrow e_4 \rightarrow 0$ , 同样由  $e_1 \rightarrow 0$ , 再根据(4)第 3 个方程, 有

$$\dot{e}_3 = -c_1 c_2 e_3 + c_1 (y_1 y_3 - x_1 x_3) = c_1 e_3 (y_1 - c_2) + c_1 x_3 e_1,$$

则  $\dot{e}_3 = c_1 e_3 (y_1 - c_2)$ . 根据假设, 不难得到  $e_3 \rightarrow 0$ . 根据(4)第2个方程, 有

$$\dot{e}_2 = -b_1 e_2 - b_2 e_3 + N b_3 e_1 - b_3 (y_1^2 - x_1^2) + b_3 (y_1 y_3 - x_1 x_3) + b_3 (y_1 y_4 - x_1 x_4).$$

由于  $e_1, e_3, e_4 \rightarrow 0$ , 从而  $e_2 \rightarrow 0$ . 不在滑模面上时, 构造李雅普诺夫函数  $V(t) = \frac{1}{2} s(t)^2$ , 沿系统(4)求导得到

$$\dot{V}(t) = s(t) \left\{ \left[ a_1 e_1 - \frac{a_1 (y_1^2 - x_1^2)}{M} - a_2 e_2 - a_3 e_3(t) - a_4 e_4(t) + u(t) \right] \right\} = -\eta |s(t)| < 0.$$

两边积分, 有

$$0 < \int_0^t [\eta |s(\tau)|] d\tau < -\int_0^t \dot{V} d\tau < V(0) - V(t) < V(0) - V(\infty) < V(0).$$

根据 Barbalat's 引理, 不难得到  $s \rightarrow 0$ , 则主从系统(2)与(3)滑模混沌同步.

## 2 数值仿真

选取参数  $a_1=0.07, a_2=0.15, a_3=0.15, a_4=0.06, b_1=0.06, b_2=0.14, b_3=0.07, c_1=0.4, c_2=0.4, d_1=0.12, d_2=0.015, M=2, N=1, k=2, \eta=0.1$ , 系统(2)和(3)状态变量初始值分布取为(0.02, 0.01, 0.04, 0.03)和(0.01, 0.03, 0.01, 0.01).

定理1中

$$u(t) = -\left(a_1 e_1 - \frac{a_1 (y_1^2 - x_1^2)}{M} - a_2 e_2 - a_3 e_3 - a_4 e_4\right) - d_1^{-1} (k - d_2) (d_1 e_1 - d_2 e_4) - \eta \operatorname{sgn}(s).$$

定理2中

$$u(t) = -\left(a_1 e_1 - \frac{a_1 (y_1^2 - x_1^2)}{M} - a_2 e_2 - a_3 e_3 - a_4 e_4\right) - \eta \operatorname{sgn}(s).$$

系统的误差曲线如图2,3所示. 从图2,3可以看到, 系统(2),(3)的误差初始时刻较大, 随着时间的推移误差逐渐缩小并最终趋于原点. 定理1的同步方案中实现同步的时间更短, 同步速度更快; 定理2的同步方案相对慢一些, 但其控制器相对更加简单.

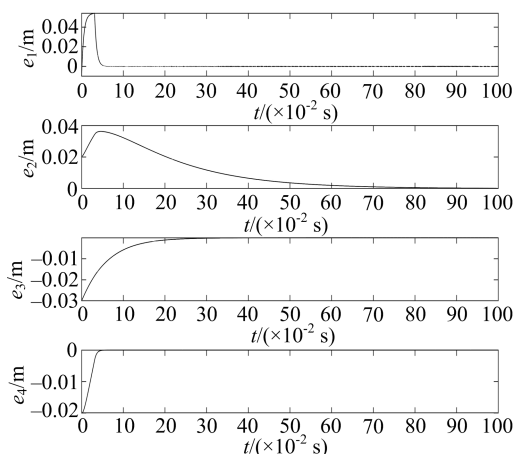


图2 定理1中的系统误差

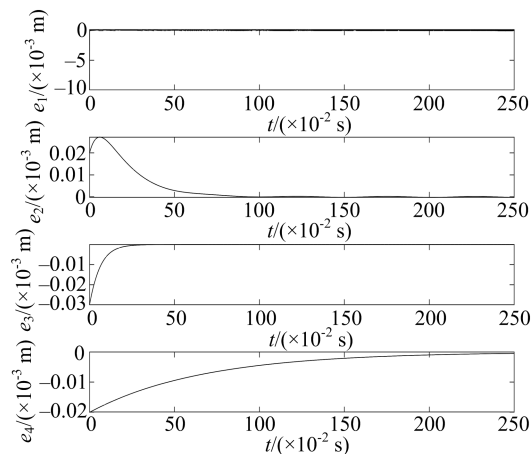


图3 定理2中的系统误差

## 3 结束语

论文研究了水资源供需混沌系统的自适应滑模同步, 根据混沌同步控制相关理论给出了同步控制的相关研究结论, 并用 Matlab 仿真算例对所得结果进行了数值验证. 当水资源供需系统出现混沌时, 供需平衡将被打破, 通过调整外部控制输入量使供需系统在有限时间内趋于同步及平衡就显得尤为重要.

## 参考文献:

- [1] 张晓勇, 黄卫, 司蔚, 等. 浅谈当前水资源的现状和问题及对策[J]. 山西化工, 2007, 27 (5): 68-70.
- [2] 何钰, 唐颖, 陈兰英, 等. 基于 BP 神经网络的水质评价及水质时空演变趋势研究[J]. 环境保护科学, 2018, 44 (3): 114-120.
- [3] 宋全香, 杨峰. 河南省水资源配置模型模拟研究[J]. 水科学与工程, 2008, 6 (3): 16-21.
- [4] 秦欢欢. 北京市水资源供需二次平衡的系统动力学模拟与研究[J]. 水资源与水工程学报, 2018, 29 (3): 21-27.
- [5] 王炳龙, 蔡宴朋, 李春晖. 基于区间分析的鄂尔多斯市水资源承载力研究[J]. 人民黄河, 2017, 39 (3): 55-60.
- [6] 张晓宇, 许端阳, 卢周扬帆, 等. 基于系统动力学的阿拉善“三生”用水系统演化模拟与调控[J]. 干旱区资源与环境, 2019, 33 (8): 107-113.
- [7] 王雅竹, 石炼. 五家渠市水资源供需平衡及水资源承载力分析[J]. 中国农村水利水电, 2013 (6): 16-20.
- [8] 刘熙娟, 刘云. 一类水资源供需系统动力学特性分析[J]. 人民黄河, 2020, 42 (2): 81-83.
- [9] DI C L, YANG X H, HUANG D W. A new water resources supply-demand system and its hyper-chaotic control[J]. Advanced in Control Engineering and Information Science, 2011, 15 (2): 734-738.
- [10] 赵灵冬, 胡建兵, 包志华, 等. 分数阶系统有限时间稳定性理论及分数阶超混沌 Lorenz 系统有限时间同步[J]. 物理学报, 2011, 60 (10): 5071-5075.

(责任编辑 朱夜明)