doi:10.3969/j.issn.1000-2162.2024.02.005

一类 Sierpinski 型自相似测度的非谱性研究

殷峰丽[1],张敏敏[2*]

(1.周口师范学院 数学与统计学院,河南 周口 466001;2.安徽工业大学 应用数学系,安徽 马鞍山 243002)

摘　要:令 $\mu_{\rho Q,D}$ 为平面上的 Sierpinski 型自相似测度,其中 ρ 为大于 1 的实数,$\boldsymbol{Q}$ 为 2×2 的正交对合矩阵,$D=\left\{\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}-1\\-1\end{pmatrix}\right\}$ 为 4 个元素数字集. 证明了当 $\rho=\pm\sqrt[2r]{\frac{2q}{p}}$ 且 $r>1$ 时或者 $\rho=\frac{2q}{p}$ 且 $\rho\boldsymbol{Q}\in M_2(\mathbb{Q})$时,Hilbert 空间 $L^2(\mu_{\rho Q,D})$具有指数型的无穷正交集但没有正交基,即 $\mu_{\rho Q,D}$ 不是谱测度,这为解决平面上测度的谱性提供了新的刻画.

关键词:正交集;非谱性;Sierpinski 型;自相似测度

中图分类号:O177　　**文献标志码**:A　　**文章编号**:1000-2162(2024)02-0029-05

The non-spectrality of a class of Sierpinski-type self-similar measures

YIN Fengli[1], ZHANG Minmin[2*]

(1. School of Mathematics and Statistics, Zhoukou Normal University, Zhoukou 466001, China;
2. Department of Applied Mathematics, Anhui University of Technology, Ma'anshan 243002, China)

Abstract: Let $\mu_{\rho Q,D}$ be the Sierpinski-type self-similar measures on the plane, where ρ is a real number bigger than 1, $\boldsymbol{Q}$ is a 2×2 orthogonal and involutory matrix, $D=\left\{\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}-1\\-1\end{pmatrix}\right\}$ is a four-element digit set. In this paper, we proved that if $\rho=\pm\sqrt[2r]{\frac{2q}{p}}$ and $r>1$, or $\rho=\frac{2q}{p}$ and $\rho\boldsymbol{Q}\in M_2(\mathbb{Q})$, then Hilbert space $L^2(\mu_{\rho Q,D})$ admits orthogonal set of infinite exponential functions but not an orthogonal basis. In other words $\mu_{\rho Q,D}$ is not a spectral measure. This provided a new characterization for solving the spectrality of measures on the plane.

Keywords: orthogonal set; non-spectrality; Sierpinski-type; self-similar measure

对于一个$\mathbb{R}^n$ 上具有紧支撑的 Borel 概率测度 μ,若存在复指数函数族

$$E(\Lambda):=\{\mathrm{e}^{2\pi\mathrm{i}\langle\lambda,x\rangle}:\lambda\in\Lambda\}\ (\Lambda\text{ 为}\mathbb{R}^n\text{ 中的可数集})$$

为 Hilbert 空间 $L^2(\mu)$ 的规范正交基,则称 μ 为谱测度,Λ 为谱测度 μ 的谱.

谱测度的研究已经有很长的历史,可以追溯到 1967 年 Landau[1]的工作. 自 1974 年 Fuglede[2]提出著名的谱集猜想后,谱测度理论获得广泛关注[3-7]. 重要性之一在于,它们是建立 $L^2(\mu)$上调和与非调和

收稿日期:2023-02-03
基金项目:国家自然科学基金资助项目(11971194);河南省自然科学基金资助项目(212300410323);周口师范学院教育教学改革研究资助项目(J2021029)
作者简介:殷峰丽(1985-),女,河南淮阳人,周口师范学院讲师,博士,E-mail: yinfengli051818@163.com; * 张敏敏(通信作者),安徽工业大学讲师,E-mail: zhangminmin0907@163.com.

Fourier 分析的基础和前提. 目前谱测度理论已在小波分析、调和分析、动力系统以及数论等方面有重要的应用[8-11]. 另一方面,分形谱测度与勒贝格测度上的 Fourier 分析有着本质的区别.

分形测度是分形几何研究的重要内容之一,人们自然想知道典型的分形测度何时为谱测度. Sierpinski 型测度是一类非常重要的分形测度,其测度的谱性引起了众多研究者的兴趣. 文献[12]研究了由

$$\begin{pmatrix}\rho_1 & 0\\ 0 & \rho_2\end{pmatrix} \quad 和 \quad D=\left\{\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}\right\}$$

生成的 Sierpinski 型测度的谱性,证明了 $\mu_{\mathrm{diag}[\rho_1,\rho_2],D}$ 为谱测度当且仅当 ρ_1 和 ρ_2 都是被 3 整除的整数,此结果的特殊情形 $\rho_1=\rho_2$ 是文献[13]中的结果. 受这些思想的启发,论文关注由一般矩阵和 4 个元素数字集生成的 Sierpinski 型自相似测度的谱性.

设 ρ 为大于 1 的实数,$\boldsymbol{Q}$ 为 2×2 的正交对合矩阵,$D=\left\{\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}-1\\-1\end{pmatrix}\right\}$,则在弱收敛意义下,存在一个由无穷个离散测度卷积生成的 Borel 概率测度

$$\mu_{\rho\boldsymbol{Q},D}=\delta_{(\rho\boldsymbol{Q})^{-1}D}*\delta_{(\rho\boldsymbol{Q})^{-2}D}*\delta_{(\rho\boldsymbol{Q})^{-3}D}*\cdots, \tag{1}$$

称 $\mu_{\rho\boldsymbol{Q},D}$ 为 Sierpinski 型自相似测度,其中:$\delta_E=\frac{1}{\# E}\sum_{e\in E}\delta_e$, $\# E$ 表示 E 中元素的个数.

1 预备知识及主要结论

令 Λ 为 $\mathbb{R}^n$ 中的可数子集,记 $E(\Lambda):=\{e_\lambda:\lambda\in\Lambda\}$,其中 $e_\lambda=\mathrm{e}^{2\pi\mathrm{i}\langle\lambda,x\rangle}$. 若 $E(\Lambda)$ 是 $L^2(\mu)$ 的正交集,则称 Λ 是测度 μ 的正交集,其中:$E(\Lambda)$ 是指数型正交集意味着 $E(\Lambda)$ 中任意元素两两正交.

给定测度 μ,其傅里叶变换定义为

$$\hat{\mu}(\xi)=\int \mathrm{e}^{-2\pi\mathrm{i}\langle\xi,x\rangle}\mathrm{d}\mu(x).$$

令 $Z(h)=\{\xi:h(\xi)=0\}$,此时,指数型函数族 $E(\Lambda)$ 中元素正交等价于集合 Λ 中元素的差(0 除外)是 $Z(\hat{\mu})$ 中的元素,也称 Λ 为双零集.

对于测度 $\mu_{\rho\boldsymbol{Q},D}$,由傅里叶变换的定义可得

$$Z(m_D)=\left\{\begin{pmatrix}\frac{1}{2}\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\\frac{1}{2}\end{pmatrix},\begin{pmatrix}\frac{1}{2}\\\frac{1}{2}\end{pmatrix}\right\}+2\,\mathbb{Z}^2,$$

$$Z(\hat{\mu}_{\rho\boldsymbol{Q},D})=\bigcup_{k=1}^{\infty}(\rho\boldsymbol{Q}^{\mathrm{T}})^k Z(m_D), \tag{2}$$

其中:$m_D(\xi)=\hat{\delta}_D(\xi)=\frac{1}{\# D}\sum_{d\in D}\mathrm{e}^{2\pi\mathrm{i}\langle\lambda,x\rangle}$.

引理 1[14] 设 $\mu=\nu*\omega$ 为两个概率测度 ν,ω 的卷积,且它们都不是 Dirac 测度. 若离散集合 Λ 是测度 ν 的正交集且 $0\in\Lambda$,则该集合 Λ 也是测度 μ 的正交集,但不是测度 μ 的谱.

在以上基础上,得出如下结论.

定理 1 设 $\mu_{\rho\boldsymbol{Q},D}$ 为式(1)中定义的 Sierpinski 型自相似测度,则 $\mu_{\rho\boldsymbol{Q},D}$ 有无穷正交集当且仅当 $\rho=\pm\sqrt[2r]{\frac{2q}{p}}$,其中 p,q,r 是正整数且 $\gcd(2q,p)=1$.

在定理 1 前提下,证明了下列情形测度 $\mu_{\rho\boldsymbol{Q},D}$ 是非谱的.

定理 2 令 $\rho=\pm\sqrt[2r]{\frac{2q}{p}}$,其中 p,q,r 是正整数且 $\gcd(2q,p)=1$. 若 $r>1$,则 $\mu_{\rho\boldsymbol{Q},D}$ 不是谱测度.

定理 3 令 $\rho=\pm\sqrt[2r]{\frac{2q}{p}}$,其中 p,q,r 是正整数且 $\gcd(2q,p)=1$. 若 $r=1$ 且 $\rho\boldsymbol{Q}\notin M_2(\mathbb{Q})$,则 $\mu_{\rho\boldsymbol{Q},D}$ 不是谱测度.

2　主要结论的证明

回顾(1)式

$$\mu_{\rho Q,D}=\delta_{(\rho Q)^{-1}D}*\delta_{(\rho Q)^{-2}D}*\delta_{(\rho Q)^{-3}D}*\cdots.$$

可将 $\mu_{\rho Q,D}$ 重新写为

$$\mu_{\rho Q,D}=*_{k=1}^{\infty}\delta_{(\rho Q)^{-k}D}=*\,\delta_{(\rho Q)^{-1}D}*\mu_{\rho^2E,(\rho Q)^{-1}D}*\mu_{\rho^2E,D},$$

其中 $\boldsymbol{E}$ 是单位矩阵且

$$\mu_{\rho^2,(\rho Q)^{-1}D}:=\mu_{\rho^2\boldsymbol{E},(\rho Q)^{-1}D}=\delta_{\rho^{-2}(\rho Q)^{-1}D}*\delta_{\rho^{-4}(\rho Q)^{-1}D}*\cdots,\tag{3}$$

$$\mu_{\rho^2,D}:=\mu_{\rho^2\boldsymbol{E},D}=\delta_{\rho^{-2}D}*\delta_{\rho^{-4}D}*\cdots.\tag{4}$$

引理 2[13]　设 $\mu_{\rho Q,D}$ 为(4)中定义的自相似测度，则 $\mu_{\rho^2,D}$ 存在无穷正交集当且仅当 $\rho=\pm\sqrt[2r]{\dfrac{2q}{p}}$，其中 p,q,r 是正整数，$\gcd(2q,p)=1$ 且 $x^{2r}-\dfrac{2q}{p}$在有理数范围内不可约.

此引理给出了 $\mu_{\rho^2,D}$ 为无穷正交集存在的充要条件. 下面引理说明 $\mu_{\rho^2,D}$ 与 $\mu_{\rho^2,(\rho Q)^{-1}D}$ 的无穷正交集有关系，其证明直接由正交集的定义可得，这里不再赘述.

引理 3[12]　设 $\boldsymbol{A}$ 为 $n\times n$ 实扩张矩阵，$\boldsymbol{Q}\subset\mathbb{R}^n$为有限集，$\mu_{\boldsymbol{A},\boldsymbol{Q}}$ 为满足

$$\mu_{\boldsymbol{A},\boldsymbol{Q}}=\frac{1}{\#\boldsymbol{Q}}\sum_{d\in\boldsymbol{Q}}\mu_{\boldsymbol{A},\boldsymbol{Q}}(\boldsymbol{A}(\cdot)-d)$$

的自相似测度，若 $\boldsymbol{B}$ 为 $n\times n$ 可逆矩阵且满足$\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{BA}$，则 Λ 是 $\mu_{\boldsymbol{A},\boldsymbol{Q}}$ 的正交集当且仅当$\boldsymbol{B}^{*-1}\Lambda$ 是 $\mu_{\boldsymbol{A},B\boldsymbol{Q}}$ 的正交集，其中$\boldsymbol{B}^*$ 是 $\boldsymbol{B}$ 的转置.

定理 1 的证明. 充分性由引理 1,2 可得，下面证明必要性. 设 Λ 为测度$\mu_{\rho Q,D}$ 的无穷正交集，则

$$\Lambda-\Lambda\subset Z(\hat{\mu}_{\rho Q,D})\cup\{0\}.$$

由于

$$Z(\hat{\mu}_{\rho Q,D})=Z(\hat{\delta}_{(\rho Q)^{-1}D})\cup Z(\hat{\mu}_{\rho^2,(\rho Q)^{-1}D})\cup Z(\hat{\mu}_{\rho^2,D}),$$

及 Ramsey 定理(参考文献[16]中定理 4.1)，存在无穷子集 $\Lambda'\subset\Lambda$，使得 Λ'是$\mu_{\rho^2,(\rho Q)^{-1}D}$ 或$\mu_{\rho^2,D}$ 的无穷正交集. 由引理 3，$\mu_{\rho^2,(\rho Q)^{-1}D}$ 有无穷正交集当且仅当$\mu_{\rho^2,D}$ 有无穷正交集. 又由引理 2 可得 $\rho=\pm\sqrt[2r]{\dfrac{2q}{p}}$，其中 p,q,r 是正整数且 $\gcd(2q,p)=1$. 定理得证.

定理 2 的证明. 记 $u:=\rho^{2r}=\dfrac{2q}{p}$，由(2)式可得

$$Z(\hat{\mu}_{\rho Q,D})=\bigcup_{k=1}^{\infty}(\rho\boldsymbol{Q}^{\mathrm{T}})^kZ(m_D)=\bigcup_{k=0}^{\infty}\bigcup_{i=1}^{2r}(\rho\boldsymbol{Q}^{\mathrm{T}})^{2rk+i}Z(m_D)=\bigcup_{i=1}^{2r}\bigcup_{k=0}^{\infty}u^k(\rho\boldsymbol{Q}^{\mathrm{T}})^iZ(m_D).$$

令

$$\mu_i=\delta_{(\rho Q)^{-i}D}*\delta_{u^{-1}(\rho Q)^{-i}D}*\delta_{u^{-2}(\rho Q)^{-i}D}*\cdots,i=1,2,\cdots,2r,$$

可得

$$Z(\hat{\mu}_i)=\bigcup_{k=0}^{\infty}u^k(\rho\boldsymbol{Q}^{\mathrm{T}})^iZ(m_D),$$

且

$$\mu_{\rho Q,D}=\mu_1*\mu_2*\mu_3*\cdots*\mu_{2r}.$$

令 $0\in\Lambda$ 为$\mu_{\rho Q,D}$ 的无穷正交集，对任意 $\lambda_1\neq\lambda_2\in\Lambda$，有

$$\lambda_1=u^{k_1}(\rho\boldsymbol{Q}^{\mathrm{T}})^{i_1}\frac{1}{2}\vec{a},\lambda_2=u^{k_2}(\rho\boldsymbol{Q}^{\mathrm{T}})^{i_2}\frac{1}{2}\vec{b},$$

其中：$k_1,k_2\geqslant 0,i_1,i_2\in\{1,2,\cdots,2r\}$且

$$\vec{a},\vec{b}\in\left\{\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}\right\}+2\mathbb{Z}^2.$$

由 Λ 的正交性可得存在 $k\geqslant 0,1\leqslant i\leqslant 2r$,使得

$$u^{k_1}(\rho\boldsymbol{Q}^{\mathrm{T}})^{i_1}\ \frac{1}{2}\vec{a}-u^{k_2}(\rho\boldsymbol{Q}^{\mathrm{T}})^{i_2}\ \frac{1}{2}\vec{b}=u^{k}(\rho\boldsymbol{Q}^{\mathrm{T}})^{i}\ \frac{1}{2}\vec{c},\tag{5}$$

其中:$\vec{c}\in\left\{\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}\right\}+2\mathbb{Z}^2$. 不失一般性,可设 $i\leqslant\min\{i_1,i_2\}$.

(I) 若 i_1-i,i_2-i 都是偶数,则由(5)式可得

$$u^{k_1}\rho^{i_1-i}\vec{a}-u^{k_2}\rho^{i_2-i}\vec{b}=u^{k}\vec{c}.$$

由 $x^{2r}-u$ 在有理数范围内不可约,可得 $i_1=i_2=i$, 此时有

$$(\Lambda-\Lambda)\backslash\{0\}\subset Z(\hat{\mu}_i),i\in\{1,2,\cdots,2r\}.$$

由引理1可知 Λ 不是 $\mu_{\rho\boldsymbol{Q},D}$ 的谱.

(II) 若 i_1-i,i_2-i 其中之一是偶数,不失一般性,可设 i_1-i 为奇数,i_2-i 为偶数,由(5)式可得

$$u^{k_1}\rho^{i_1-i}\ \boldsymbol{Q}^{\mathrm{T}}\vec{a}=u^{k_2}\rho^{i_2-i}\vec{b}+u^{k}\vec{c},$$

进一步有

$$u^{2k_1}\rho^{2(i_1-i)}\ \|\vec{a}\|^2=u^{2k_2}\rho^{2(i_2-i)}\ \|\vec{b}\|^2+2u^{k_2+k}\rho^{i_2-i}\langle\vec{b},\vec{c}\rangle+u^{2k}\ \|\vec{c}\|^2.$$

若 $i_2\neq i$,与 ρ 的最小多项式为 $x^{2r}-u$ 矛盾,因此 $i_2=i$,上式简化为

$$u^{2k_1}\rho^{2(i_1-i)}\ \|\vec{a}\|^2=u^{2k_2}\ \|\vec{b}\|^2+2u^{k_2+k}\langle\vec{b},\vec{c}\rangle+u^{2k}\ \|\vec{c}\|^2.$$

由于等式右边为有理数,因此 $2(i_1-i)=0$ 或 $2(i_1-i)=2r$,此时有

$$(\Lambda-\Lambda)\backslash\{0\}\subset Z(\hat{\mu}_i)\cup Z(\hat{\mu}_{i+r}),i\in\{1,2,\cdots,r\}.$$

由引理1可知 Λ 不是 $\mu_{\rho\boldsymbol{Q},D}$ 的谱.

(III) 若 i_1-i,i_2-i 都是奇数,同理(II),可得 Λ 不是 $\mu_{\rho\boldsymbol{Q},D}$ 的谱.

综上,定理得证.

定理3的证明. 令

$$v=\delta_{(\rho\boldsymbol{Q})^{-1}D}*\delta_{(\rho\boldsymbol{Q})^{-3}D}*\delta_{(\rho\boldsymbol{Q})^{-5}D}*\cdots,$$

因 $\mu_{\rho^2,D}$ 由(4)式定义,可得

$$Z(\hat{\mu}_{\rho^2,D})=\bigcup_{k=1}^{\infty}(\rho\boldsymbol{Q}^{\mathrm{T}})^{2k}Z(m_D)=\bigcup_{k=1}^{\infty}\left(\frac{2q}{p}\right)^{k}Z(m_D)\subseteq\boldsymbol{Q}^2,$$

且

$$Z(\hat{v})=\bigcup_{k=0}^{\infty}(\rho\boldsymbol{Q}^{\mathrm{T}})^{2k+1}Z(m_D)=(\rho\boldsymbol{Q}^{\mathrm{T}})\bigcup_{k=1}^{\infty}\left(\frac{2q}{p}\right)^{k}Z(m_D).$$

可以判定

$$(\rho\boldsymbol{Q}^{\mathrm{T}})\mathbb{Q}^2\cap\boldsymbol{Q}^2=\{0\}.$$

事实上,若存在非零元素 $\omega\in\mathbb{Q}^2$,使得 $\rho\boldsymbol{Q}^{\mathrm{T}}\omega\in\mathbb{Q}^2$,则 $\rho\boldsymbol{Q}\in M_2(\mathbb{Q})$,与假设矛盾,因此上述判定正确,可得

$$(Z(\hat{\mu}_{\rho^2,D})-Z(\hat{\mu}_{\rho^2,D}))\cap Z(\hat{v})=\varnothing,(Z(\hat{v})-Z(\hat{v}))\cap Z(\hat{\mu}_{\rho^2,D})=\varnothing.\tag{6}$$

令 $0\in\Lambda$ 为 $\mu_{\rho\boldsymbol{Q},D}$ 的正交集,则

$$Z(\hat{\mu}_{\rho\boldsymbol{Q},D})=\bigcup_{k=1}^{\infty}(\rho\boldsymbol{Q}^{\mathrm{T}})^{k}Z(m_D)=$$
$$\left(\bigcup_{k=0}^{\infty}(\rho\boldsymbol{Q}^{\mathrm{T}})^{2k+1}Z(m_D)\right)\cup\left(\bigcup_{k=1}^{\infty}(\rho\boldsymbol{Q}^{\mathrm{T}})^{2k}Z(m_D)\right)=Z(\hat{v})\cup Z(\hat{\mu}_{\rho^2,D}).$$

又 $\mu_{\rho\boldsymbol{Q},D}=\mu_{\rho^2,D}*v$,可得

$$(\Lambda-\Lambda)\backslash\{0\}\subseteq Z(\hat{\mu}_{\rho\boldsymbol{Q},D})=Z(\hat{v})\cup Z(\hat{\mu}_{\rho^2,D}).$$

对任意 $0\neq\lambda\in\Lambda$,由(6)式可得

$$(\Lambda-\Lambda)\backslash\{0\}\subseteq\begin{cases}Z(\hat{v}),\lambda\in Z(\hat{v}),\\ Z(\hat{\mu}_{\rho^2,D}),\lambda\in Z(\hat{\mu}_{\rho^2,D}).\end{cases}$$

因此 Λ 是测度 v 或 $\mu_{\rho^2,D}$ 的正交集,由引理1可知 Λ 不是 $\mu_{\rho\boldsymbol{Q},D}$ 的谱. 定理得证.

参考文献：

[1] LANDAU H. Necessary density conditions for sampling and interpolation of certain entire functions[J]. Acta Mathematica，1967，117：37-52.

[2] FUGLEDE B. Commuting self-adjoint partial differential operators and a group theoretic problem[J]. Journal of Functional Analysis，1974，16：101-121.

[3] DUTKAY D，HAN D G，SUN Q Y. Divergence of the mock and scrambled Fourier series on fractal measures[J]. Transactions of The American Mathematical Society，2014，366 (4)：2191-2208.

[4] LAI C K，LAU K S，RAO H. Classification of tile digit sets as product-forms[J]. Transactions of the American Mathematical Society，2017，369 (1)：623-644.

[5] LAI C K，LAU K S，RAO H. Spectral structure of digit sets of self-similar tiles on R^1[J]. Transactions of The American Mathematical Society，2013，365 (7)：3831-3850.

[6] STRICHARTZ R. Convergence of Mock fourier series[J]. Journal D′ Analyse Mathematique，2006，99：333-353.

[7] TAO T. Fuglede's conjecture is false in 5 and higher dimensions[J]. Mathematical Research Letters，2004，11 (2/3)：251-258.

[8] DUTKAY D，HAUSSERMANN J. Number theory problems from the harmonic analysis of a fractal[J]. Journal of Number Theory，2016，159：7-26.

[9] DUTKAY D，JORGENSEN P. Analysis of orthogonality and of orbits in affine iterated function systems[J]. Mathematische Zeitschrift，2007，256 (4)：801-823.

[10] DUTKAY D，JORGENSEN P. Fourier frequencies in affine iterated function systems[J]. Journal of Functional Analysis，2007，247 (1)：110-137.

[11] DUTKAY D，LAI C K. Uniformity of measures with Fourier frames[J]. Advances in Mathematics，2014，252：684-707.

[12] DAI X R，FU X Y，YAN Z H. Spectrality of self-affine Sierpinski-type measures on R^2[J]. Applied and Computational Harmonic Analysis，2021，52：63-81.

[13] DENG Q R，LAU K S. Sierpinski-type spectral self-similar measures[J]. Journal of Functional Analysis，2015，269 (5)，1310-1326.

[14] DAI X R，HE X G，LAU K S. On spectral N-Bernoulli measures[J]. Advances in Mathematics，2014，259 (3)：511-531.

[15] AN L X，HE X G，LI H X. Spectrality of infinite Bernoulli convolutions[J]. Journal of Functional Analysis，2015，269 (5)：1571-1590.

（责任编辑　朱夜明）